Feynman Moroccan Adventure

Pôle Physique





L'École d'Athènes, Raphaël 1508-1512.

Avant-propos

Cher lecteur, Chère lectrice, ô physicien, ô physicienne, le livret que vous avez entre vos mains est la sève pédagogique du tout premier camp de physique organisé par l'association Math@Maroc au **Lycée Mohamed VI D'Excellence à Benguerir** entre le **14 et le 20 Juillet 2025**. Une semaine qui avait pour objectif, d'immerger les jeunes participants du Tronc Commun, et de première année Bac, dans le monde fascinant de la science, et on découvre, passée ladite semaine, que ce sont les participants qui nous ont immergé dans un monde de liesse et de curiosité singulière. On tient à remercier tous les candidats qui ont contribué au succès de cette première édition.

On voulait scruter la physique loin des bancs scolaires, affranchis des cours linéaires et des examens figés. Pour une fois, on voulait admirer la physique comme un faîte auréolé de mystère, pourtant atteignable et à la portée des hommes. On espère avoir relevé le défi et montré à nos jeunes que la physique est la science de tous les jours, à même de vous expliquer la météo qui fera le lendemain, de conjecturer les trajectoires de tout ce qui est en mouvement, de sonder l'infiniment petit, et de contempler l'infiniment grand. La pédagogie que nous avons tenté d'adopter est celle de Feynmann; simplifier les sciences sans pour autant tomber dans la vulgarisation, être fidèle à la rigueur et au formalisme sans pour autant finir sur des complications surérogatoires. C'est ce juste milieu judicieux que nous avons cherché à concilier pour la rédaction de ces cours, et on espère avoir réussi dans cette mission.

Le livret est composé de 14 chapitres répartis comme suit :

- Trois chapitres de mathématiques passant en filigrane des applications en physique.
- Un premier cours de thermodynamique pour répondre à l'ultime question : Comment calculer la température moyenne de la Terre ?
- La mécanique se décline en trois chapitres fondamentaux : la cinématique, la dynamique et l'énergétique .
- Le chapitre 8 est un deuxième cours de thermodynamique dont le but est de montrer la relation des gaz parfaits/Loi Boyle-Mariotte.
- Le chapitre 9 nous emporte à l'infiniment grand afin d'étudier les mouvements stellaires et planétaires.
- S'ensuivent deux chapitres sur les ondes, qui conduisent à la fameuse **équation** d'onde de D'Alembert, en empruntant le chemin suivi par D'Alembert lui-même pour énoncer son équation historique, il y a plus de deux siècles et demi.
- Deux chapitres d'électrocomagnétisme, où **Coulomb** et **Lorentz** nous présentent le fruit de leur génie pour expliquer des phénomènes aussi magiques que le magnétisme ou l'induction.
- Le livret se clôture sur le corrigé du test qui a eu lieu l'avant-dernier jour du camp.

Le moment est venu pour rendre à César ce qui est à César. On se doit de saluer le travail d'une cohorte engagée qui a veillé à l'élaboration du plan et du contenu de ce livret. Un premier merci s'adresse à Mohamed Taha Afif et Ahmed Chahlaoui, les VP de l'événement FMA dont le succès est dû à leur gouvernance éclairée, à leur vision pédagogique, et au sourire de l'un conjugué à l'humour de l'autre. On remercie Aymane Maaitat, aka le maître du rationnalisme de Math & Maroc, dont vous retrouvrez la trace dans les références philosophiques de ce cours, Mouad Datazout notre plus grand pédagogue iconique de sa philosophie de vie, et de son savoir encyclopédique (Hello Tchernobyl!), Amine Mahdane le quantique qui vérifie bien l'identité de Heisenberg, assez pédagogue pour vous expliquer l'indice de réfraction par un mouvement zigzagué, Yassir Amazouz, pour qui la physique de l'expérimentation - hyperbole raisonnable et raisonnée- a dévoilé tous ses secrets, un esprit scientifique percutant et une rigueur implacable, Amine El Khanchaf, qui innonde sa classe d'une atmosphère joviale avant de se lancer dans sa mission d'enseignement avec noblesse, Samy Essebbabi le maître de rigueur, le parrain de l'équipe qui veille sur le bon déroulement de chaque cours et notre garde-fou des considérations compliquées, Ali Hakim, le pédagogue expert qu'aucune force ne peut juguler l'enthousiasme dès qu'il se retrouve face à un tableau, la merveilleuse Salma Ouacha, à l'écoute de ses élèves, d'une grande habileté dans sa mission, et d'une compétence sans égal, Mouad Zemzoumi le professeur heureux, qui ne se contente pas d'enseigner mais il apprend à ses élèves d'aimer ce qu'il leur transmet, Hadir Taleb dont le tableau expose des formules calligraphiées avec soin, accompagnées d'un discours émaillé d'analogies éclairantes, Bilal Bahchani qui a contribué à l'élaboration et à la rédaction des cours de TPs du camp, une personnalité intellectuelle singulière, Sara El Akel, dotée d'un raisonnement structuré et d'une rigueur sans faille, elle incarne à la fois la compétence et l'intégrité, Aymen Houas, qui dompte la physique d'une plume précise jusqu'à laisser fondre les sceptiques comme de la glace à 298K, Youssef Lazzouzi et Badr Eddine Houmaydy les Maxwell de l'équipe, faisant preuve d'une grande maturité intellectuelle et d'un sens aigu de détail, Ayoub Gourari appliqué dans son travail, sérieux et consciencieux, et **Abderrahmane Echaarani** qui a procédé à un audit méticuleux de ces supports de cours.

Derrière les coulisses de FMA, une autre milice a travaillé sans repos ni trêve pour rendre cet événement possible. Une pensée sincère à Khalil EL Azri, le pillier de l'événement qui a tracé son fil rouge depuis le début. Hommage à toute l'équipe de sélection : Amine Saadi qui s'applique dans ses tâches plus vite qu'un photon ne traverse un interféromètre, Ilyas Dahaoui fort de son approche scientifique exhaustive, Nour el houda El bouz qui a aidé lors de la deuxième phase de sélection, et un hommage salutaire à Chaymae Faraji qui a toujours travaillé avec constance et méthode et à qui l'on doit l'idée originelle de l'événement FMA. Un grand merci s'adresse également à notre artiste Islam Bouikiri à qui on doit la beauté de nos affiches. Et pour parfaire cet arsenal, rendons hommage à l'équipe qui était sur place à Benguerir pour assurer l'événement : Mohammed Taha Ennahili enjoué et plein d'esprit, Nasma Chadli incarnant responsabilité et engagement, s'est imposée comme une figure centrale de la semaine FMA, Manar Souktani dévouée, méthodique et performante, Rania Daya à travers son oculaire, capture et fige tous les bons moments, Malak Khaldouni et Oumayma Essarhi qui ont apporté à l'événement une ambiance agréable tout en dégageant une aura inspirante, et Adam Lachkar, toujours méthodique et appliqué dans tout ce qu'il entreprend.

Une dithyrambe, certes longue mais elle est bien à sa place. Cher lecteur, Chère lectrice, on vous invite à passer un moment d'apprentissage délassant, à travers les pages de ce livret. Si vous relevez quoi que ce soit, ou vous avez une remarque à nous adresser, veuillez nous envoyer un mail à l'adresse suivante : math.maroc.fma@gmail.com

Contents

1	Fon	ctions usuelles 9						
	1.1	Les fonctions						
	1.2	Polynômes						
	1.3	Fonctions rationnelles						
	1.4	Fonction exponentielle						
		1.4.1 Définition et propriétés						
	1.5	Fonctions inverses						
		1.5.1 Fonction logarithmique						
		1.5.2 Fonctions trigonométriques inverses						
		1 one of the control						
2	Dér	ivation 23						
	2.1	Limites et continuité						
		2.1.1 Les fonctions						
		2.1.2 Limite d'une fonction en un point fini $a cdots c$						
		2.1.3 Opérations sur les limites						
		2.1.4 Règles de calcul de limites						
		2.1.5 Continuité						
	2.2	Dérivation : définitions et interprétations						
		2.2.1 Définition						
		2.2.2 Interprétation géométrique du nombre dérivée						
		2.2.3 Variation d'une fonction interprétée par le signe de sa dérivée 27						
	2.3	Dérivation : Propriétés et applications						
		2.3.1 Règles et propriétés de la dérivation						
		2.3.2 Continuité et Dérivabilité						
		2.3.3 Dérivées partielles						
		2.3.4 Dérivation d'un vecteur						
		2.3.5 Développement limité d'une fonction dérivable						
		Zioto Ziototepponioni annioni a anni conscienti accitationi i i i i i i i i i i i i i i i i i i						
3	Cal	Calcul Intégral 3						
	3.1	Calcul de primitives						
	3.2	Techniques d'intégration						
		3.2.1 Intégration par parties						
		3.2.2 Changement de variable						
	3.3	Interprétation géométrique des intégrales						
	3.4	Les équations différentielles en physique						
4	The	ermodynamique 1 : Température de la Terre 44						
	4.1	Introduction						
	4.2	Loi de Planck						
		4.2.1 Définition						
		4.2.2 Loi de Planck						
		4.2.3 Loi de Wien						
	4.3	Équilibre thermodynamique						
		4.3.1 Loi de Stefan-Boltzmann						
	4.4	Puissance reçue par la terre						
	4.5	5 Effet de l'albédo						
	4.6	Effet de l'atmosphère						

		4.6.1	Atmosphère parfaitement transparente
		4.6.2	Atmosphère réelle et effet de serre
5	Mo	uveme	nt 51
	5.1		uction
		5.1.1	Mouvement
		5.1.2	Relativité du mouvement
	5.2		ntiel et coordonnées
		5.2.1	Référentiel
		5.2.2	Position
		5.2.3	Vitesse
	5.3	En 3 d	limensions
		5.3.1	Vecteur position
		5.3.2	Vecteur vitesse
	5.4	Accélé	${f ration}$
	5.5	Etude	de situations importantes
		5.5.1	Mouvement rectiligne uniforme
		5.5.2	Mouvement uniformément accélérée
		5.5.3	Un premier mouvement arbitraire
		5.5.4	Un deuxième mouvement arbitraire
	5.6	Mouve	ement de rotation et coordonnées polaires
	5.7	Un mo	ouvement particulier: le pendule simple
6	Dyr	namion	ue et les lois de Newton 60
•	6.1	_	canique d'Aristote à Galilée et Newton
	6.2		ité de mouvement
	6.3	•	ıxième loi de Newton ou PFD 61
	6.4		ole de Galilée
		6.4.1	Chute verticale sans frottement
		6.4.2	Mouvement ballistique
		6.4.3	L'équation de la trajectoire
	6.5	Frotte	ments
	6.6	_	
		6.6.1	Application naïve de la deuxième loi de Newton
		6.6.2	Application correcte de la deuxième loi de Newton
	6.7	Troisiè	eme loi de Newton
	6.8	La cos	mogonie de Newton
7	Poi	nt de s	vue énergétique de la mécanique 67
	7.1		l d'une force
	7.2		ies
		7.2.1	Énergie cinétique
		7.2.2	Force conservative et énergie potentielle
		7.2.3	Le théorème d'énergie cinétique T.E.C pour le cas conservatif 71
	7.3	Énergi	ie mécanique et T.E.M
	7.4	_	ique des chocs
		7.4.1	Motivation
		7.4.2	Choc élastique

8	The	rmodynamique 2 : Loi des gaz parfaits	75
9	Gra	vitation	7 8
	9.1	La trajectoire d'un satellite / une planète en orbite	79
		9.1.1 L'énergie potentielle d'une planète	79
		9.1.2 Les lois de Kepler	80
	9.2	Vitesse de libération et Trou noir	82
		9.2.1 Étude énergétique	82
		9.2.2 Le trou noir	83
10	Intr	oduction aux ondes	86
	10.1	Onde sinusoïdale	87
	10.2	Exemples d'ondes	88
	10.3	Ondes qui conservent leur forme	89
	10.4	Superposition et ondes stationnaires	90
	10.5	Superposition de sinusoïdes	94
	10.6	Effet Doppler	96
11	Equ	ation d'onde	98
	_	Propagation d'une onde sur une corde	98
	11.2	Cas d'une onde stationnaire et conditions limites :	100
12	Intr	oduction à l'électromagnétisme	102
		0	102
		-	103
			105
			$\frac{107}{107}$
			108
	12.2		109
			110
			110
			111
	12.3		112
	12.0		112
			113
	12.4		114
	12.1		114
			115
12	Drin	ncipe fondamental de l'électromagnétisme :	116
10		1	
			116117
	10.2		117 117
		±	
		0 1	117
		13.2.3 Effet Hall (optionnel)	117

14 Test	Corrigé	118
14.1	Exercice 1:	118
14.2	Exercice 2:	118
14.3	Exercice 3:	119
14.4	Problème	119
14.5	Exercice 4:	122
14.6	Exercice 5:	122
14 7	Exercice 6:	122

1 Fonctions usuelles

1.1 Les fonctions

Définition 1.1. Une **fonction** f est une application d'un domaine I vers un domaine J qui à chaque x, associe **une unique image** f(x). Dans ce cours, on s'intéresse aux fonctions telles que les domaines I et J sont des intervalles de \mathbb{R} .

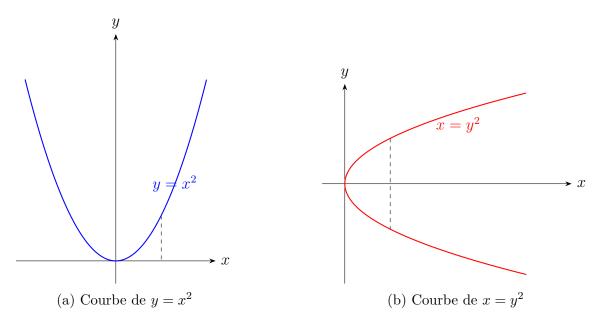


Figure 1: La courbe de gauche est une fonction, alors que la courbe droite **n'est pas une** fonction.

On voit que dans la figure 1, chaque élément x admet une unique valeur par la fonction de courbe gauche, donc elle obéit bien à la définition, et **c'est une fonction**. Contrairement à la courbe droite, où chaque élément x > 0 admet deux images, une au-dessus de l'axe des abscisses, et l'autre au-dessous. À titre d'exemple x = 1 admet deux images y = 1 et y = -1, donc **ce n'est pas une fonction**.

Proposition 1.1. Soit f une fonction définie de I vers J, $x \in I$ et $y \in J$, on dit que x est l'antécédent de y si f(x) = y,

- Si tout élément de J admet au moins un antécédent, on dit que f est surjective.
- Si tout élément de J admet au plus un antécédent, on dit que f est injective.
- Si tout élément de J admet exactement un seul antécédent, on dit que f est bijective.

Remarque: Une fonction bijective est à la fois injective et surjective.

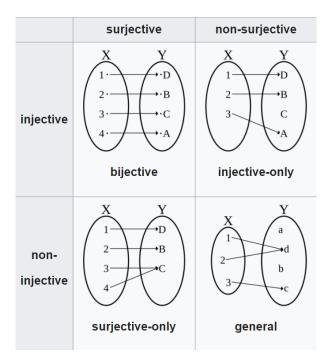


Figure 2: Figure illustrant les fonctions injectives, surjectives, et bijectives (source wikipédia).

Considérons les fonctions :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

$$x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto x^2$$

- f est surjective, car pour tout élément $y \ge 0$, on peut trouver x tel que $x^2 = y$, il suffit de prendre $x = \pm \sqrt{y}$, donc y admet au moins un antécédent. Mais f n'est pas injective comme y peut avoir deux antécédents.
- Pour $y \in \mathbb{R}$, mais y < 0, on ne peut trouver x tel que $y = x^2$ car $x^2 \ge 0$. Donc pour la fonction g, il existe des éléments sans antécédents, g n'est pas surjective. Si on prend $y \ge 0$, alors elle admet comme antécédent par la fonction l'expression de la fonction g les antécédents $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$. Mais l'ensemble de définition de g est \mathbb{R}^+ , donc $x = \sqrt{y}$ nécessairement, ainsi chaque élément admet soit un antécédent soit aucun antécédent par la fonction g. Ainsi, g est injective.
- La fonction h est injective par le même argument que g. h est surjective par le même argument que f. Ainsi h est bijective.

Note 1.1. Une fonction, c'est un ensemble de départ, une expression, et un ensemble d'arrivée, et non uniquement son expression. Dans l'exemple ci-dessus, les trois fonctions ont la même expression, mais elles sont injectives ou surjectives, selon leurs ensembles de départ et d'arrivée respectifs.

1.2 Polynômes

Définition 1.2. On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

 $x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d$

tel que a_i sont des constantes réelles, et $a_d \neq 0$, la fonction f est appelée **polynôme** de degré $d \geq 0$. Le degré est l'exposant le plus grand de la fonction.

Exemples de polynômes en physique :

- L'énergie cinétique $E_c(v) = \frac{1}{2}mv^2$ est un polynôme de degré 2 en v et on a $a_2 = \frac{m}{2}$ et $a_1 = a_0 = 0$.
- L'énergie potentielle de référence à z = 0 : $E_p(z) = -mgz$ est un polynôme de degré 1 en z et on a $a_1 = -mg$ et $a_0 = 0$.
- La loi d'Ohm U(I)=RI est un polynôme de degré 1 en I avec $a_1=R$ et $a_0=0$.

Note 1.2. Notons que si P est un polynôme de degré d alors $a_i = 0$ si i > d

Définition 1.3 (Racine d'un polynôme). r est dite racine du polynôme P si P(r) = 0.

Proposition 1.2. • La somme de deux polynômes est un polynôme.

• Le produit de deux polynômes est un polynôme.

Savez-vous que vous utilisez le polynôme $P(x) = x^6 + x^5 + 1$ à chaque fois que vous tapez la lettre a sur votre téléphone ou votre PC? En effet, chaque caractère est converti en un code binaire de 0 et de 1, et on interprète les codes, comme dans la figure 3 ci-dessous.

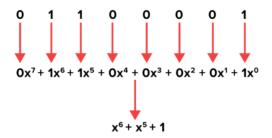


Figure 3: 01100001 est le code binaire de la lettre a

Pour les systèmes électroniques x prend la valeur x=2. Donc votre PC interprète la lettre a comme un nombre P(2).

Note 1.3. Les polynômes sont particulièrement intéressants, parce qu'ils sont faciles à manipuler, on peut les étudier à la fois de manière algébrique (étude des racines), ou de manière analytique (étude des fonctions), ou géométrique. On verra dans le prochain cours, qu'une fonction qui vérifie certaines propriétés peut être approximée par un polynôme (Développement limité).

1.3 Fonctions rationnelles

Définition 1.4. Soit P et Q deux polynômes, on définit la fonction rationnelle par :

$$f: \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où A est l'ensemble des racines réelles de Q, qu'on appelle **pôles de** f.

1.4 Fonction exponentielle

1.4.1 Définition et propriétés

On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{ Pour tout } x, y \text{ dans } \mathbb{R} \ f(x+y) = f(x)f(y) \\ f(1) = e \end{cases}$$

où $e \approx 2,71828$ est le **nombre de Néper**. [e est un nombre tout comme π]

Proposition 1.3. L'équation fonctionnelle ci-dessus, admet une unique solution.

Démonstration 1.1. Montrons l'unicité de la solution de l'équation fonctionnelle avec f(1) = e.

Soit f une solution de l'équation fonctionnelle, alors pour n entier naturel, on a

$$f(nx) = f(x)^n$$

En posant x = 1, on a

$$f(n) = f(1)^n = e^n$$

On considère maintenant un nombre rationnel $y = \frac{p}{q}$ où p et q sontdes entiers relatifs de pgcd (plus grand commun diviseur) égal à 1 et $q \neq 0$, et on veut calculer l'image de p par p:

$$f(p) = f(qy) = f(y)^q$$

De l'autre côté, nous avons $f(p) = e^p$, ainsi $f(y)^q = e^p$, en levant le tout à la puissance $\frac{1}{q}$, on retrouve

$$f(y) = e^{\frac{p}{q}} = e^y$$

Ainsi, toutes les fonctions qui satisfont l'équation fonctionnelle donnée dans la définition, et vérifient f(1) = e, coïncident entre elles sur l'ensemble des entiers relatifs ainsi que sur l'ensemble des nombres rationnels.

D'après le mathématicien Dedekind, quand deux fonctions coïncident sur l'ensemble des rationnels, alors elles coïncident partout sur \mathbb{R} . D'où l'unicité de la solution et la légitimité de la définition ^a

^aNotez que la fonction exponentielle est en général définie de manière bien différente. Pour les plus curieux, on peut la définir par exemple comme la limite de la suite $(1 + \frac{x}{n})^n$ avec n tend vers l'infini.

Définition 1.5. La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation fonctionnelle ci-dessus, elle est définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(1)^x = e^x$$

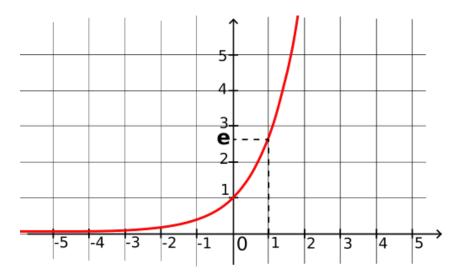


Figure 4: Tracé de la fonction exponentielle exp: $x \mapsto e^x$

La fonction exponentielle $\exp: x \longmapsto \exp(x)$ est alors une généralisation de la fonction puissance, où on élève un nombre à la puissance $x \in \mathbb{R}$, au lien de l'élever à une puissance entière, elle est caractérisée par les propriétés suivantes :

- La fonction exponentielle est strictement **croissante**.
- Pour tout x dans \mathbb{R} on a $e^x > 0$.
- On voit que lorsque x s'approche de $-\infty$, la fonction exponentielle s'approche de 0, et on note $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- Lorsque x s'approche de $+\infty$, la fonction exponentielle s'accroît de plus en plus, et on note $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

¹La notion mathématique de limite sera abordée dans le prochain cours. Ici un léger avant-goût, et non une description compréhensive. Vous pouvez revenir à cette rubrique une fois le cours de limites entamé.

Note 1.4. Soit a un réel, la fonction $x \mapsto a^x$ est aussi une solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

avec la condition f(1) = a

Théorème 1.1. Pour tout
$$x \in \mathbb{R}$$
, on a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Dans le prochain cours de la dérivation, vous aurez des éléments supplémentaires pour comprendre ce résultat. Ainsi, on peut en déduire que pour x > 0, on a

$$e^x > \frac{x^2}{2!} \implies \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

L'ordre n'est pas changé, car x>0. Ainsi, à l'infini, la quantité $\frac{e^x}{x}$ reste plus grande que $\frac{x}{2}$ qui est déjà infini, donc en termes de "limites", on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Comme on verra plus tard dans le cours de dérivation, on a " $\frac{1}{+\infty}$ "= 0, ainsi pour la limite à $-\infty$, on a

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{x \to +\infty} (-x)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$$

Note 1.5. Vous allez voir dans le cours des ondes qu'on peut exprimer la perturbation de l'onde à l'aide d'une fonction sinusoidale $S(x,t) = A\sin(wt - kx)$. Dans la vie réelle, l'onde s'évanouit au bout d'un moment, alors que la fonction sinusoidale garde toujours son amplitude maximale 1, ainsi pour prendre en compte cet évanouissement, l'expression qui dépeint fidèlement l'onde est

$$S(x,t) = Ae^{-\mu t}\sin(wt - kx)$$

où μ est une constante positive qui dépend des propriétés du milieu de propagation, et figurez-vous que $\lim_{t\to+\infty}e^{-\mu t}=0$, donc on capture cet évanouissement de l'onde.

1.5 Fonctions inverses

Définition 1.6. Si f une fonction bijective de I vers J des intervalles de \mathbb{R} , alors pour chaque élément y de J, il existe un seul et unique antécédent x de y dans I, d'après la définition 1.1. Alors on définit la fonction

$$g: J \to I$$

 $y \longmapsto x$

La fonction g associe à chaque élément de J son antécédent dans I par la fonction f. La fonction g est bien définie car l'antécédent est unique. Et on note $g = f^{-1}$, qu'on

appelle la fonction réciproque de f.

Théorème 1.2. Soit f une fonction de I vers J, et g sa fonction réciproque, alors pour tout $g \in J$:

$$f(g(y)) = y$$

et pour tout $x \in I$, on a

$$g(f(x)) = x$$

Exercise 1.1. On considère la fonction f qui convertit la température en degrés Celsius $^{\circ}C$ T_C en une autre unité de température appelé **degrés Fahrenheit** $^{\circ}F$ $f(T_C)$:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$T_C \longmapsto \frac{9}{5}T_C + 32$$

$$(1)$$

Montrez que f est bijective et que sa fonction réciproque (qui convertit une température en $^{\circ}F$ en température en $^{\circ}C$) est définie par :

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$T_F \longmapsto \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

$$(2)$$

Remarque: Le fait que la fonction de conversion d'unités soit bijective est lié au fait que la température est physiquement la même qu'elle soit décrite en °C ou en °F ou en toute autre unité.

Théorème 1.3. La fonction exponentielle est bijective.

$$\exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

Cette propriété peut être conclue d'après la courbe de la fonction exponentielle figure 4. Pour tout réel b la droite horizontale y = b intersecte la courbe en un unique point, ce qui veut dire que b admet un unique antécédent, donc la fonction exponentielle est bijective.

1.5.1 Fonction logarithmique

Définition 1.7. On définit la fonction logarithme népérien comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

$$\ln:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$$

Exercise 1.2. Montrez que pour $x, y \in]0, +\infty[$ et r nombre rationnel :

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln(x^r) = r \ln(x)$$
(3)

La dernière égalité est valide même si r est un nombre réel.

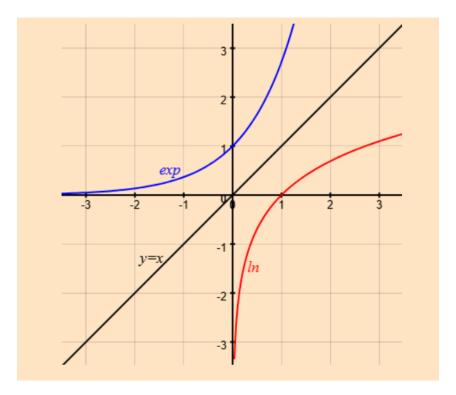


Figure 5: Les fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite d'équation y=x

Le fait que la fonction exp et la fonction ln sont symétriques par rapport à la droite y = x illustre une proriété générale de toute fonction bijective f avec sa fonction réciproque f^{-1} . Pour la fonction logarithme, on note les proriétés suivantes :

• Pour tout réel strictement positif x, on a

$$\begin{cases} \ln(x) \ge 0 \text{ si } x \ge 1\\ \ln(x) < 0 \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

- ln est une fonction strictement **croissante**. Elle est aussi bijective, et sa fonction réciproque est l'exponentielle.
- Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, alors pour $y = e^x$, on a $\ln(y) = \ln(e^x) = x$, et en termes de "limites", on a :

$$\lim_{y \to +\infty} \ln(y) = +\infty$$

• Comme $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, alors pour $y = e^x$, on a $\ln(y) = \ln(e^x) = x$, donc quand x se s'approche de $-\infty$, y s'approche de 0. Ainsi, réciproquement quand y s'approche de 0, x s'approche de $-\infty$. En termes de "limites", on a :

$$\lim_{y\to 0} \ln(y) = -\infty$$

• Comme souligné ci-dessus, quand $x \to +\infty$, on $e^x \to +\infty$ également, on veut calculer la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ en nous basant sur la limite connue

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

. Ceci n'est pas une démonstration mathématique, mais une intuition pour comprendre d'où viennent les résultats. On pose $y = \ln(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

Note 1.6. On définit le logarithme népérien de base $a \ x \longmapsto \log_a(x)$ comme la fonction réciproque de la fonction $x \longmapsto a^x$. On peut montrer que pour tout x > 0, on $a \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. En effet, pour x > 0

$$\log_a(a^x) = x$$

 $car \log_a est fonction réciproque de <math>x \longmapsto a^x$, de l'autre côté

$$\frac{\ln(a^x)}{\ln(a)} = \frac{x \ln(a)}{\ln(a)} = x$$

Ainsi, nous avons égalité des deux côtés. Donc pour tout y qui peut s'écrire sous la forme $y=a^x$, on a égalité des deux formules. Et puisque la fonction $x \mapsto a^x$ est bijective, alors pour tout y>0 il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y=a^x$. Ainsi, par propriétés de bijection, on a :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Note 1.7. Le logarithme est la fonction qui généralise le problème suivant : A quelle puissance faut-il lever le nombre 3 pour trouver 27, comme c'est un exemple simple, vous avez sûrement trouvé que c'est 3. Mais si le logarithme n'existait pas, on ne saura répondre à la question "à quelle puissance faut-il lever le nombre 3 pour trouver 19", et en se servant de lui, on peut esquisser cette réponse $\log_3(19)$.

1.5.2 Fonctions trigonométriques inverses

On considère la fonction cosinus sur l'intervalle $[0,\pi]$:

$$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$$

 $x \longmapsto \cos(x)$

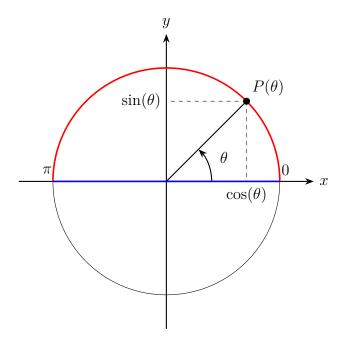


Figure 6: Chaque point de coordonées (x,0) du diamètre horizontal admet un unique antécédent par la fonction cosinus sur le demi-cercle du dessus.

On peut déduire d'après la figure 6, qu'elle est bijective de $[0, \pi]$ sur [-1, 1]. Ainsi, il est légitime de définir sa fonction réciproque \cos^{-1} qu'on note arccos, et on a

$$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$$

 $x \longmapsto \arccos(x)$

Proposition 1.4 (Propriétés de l'arccosinus). La fonction trigonométrique inverse arccos est caractérisée par :

- Entre 0 et π , la fonction cos est strictement décroissante, ainsi arccos est également strictement décroissante sur [-1, 1].
- On a

$$\begin{cases} \arccos(1) = 0\\ \arccos(-1) = \pi\\ \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

• Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

On considère la fonction sinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[-1, 1\right]$$

$$x \longmapsto \sin(x)$$

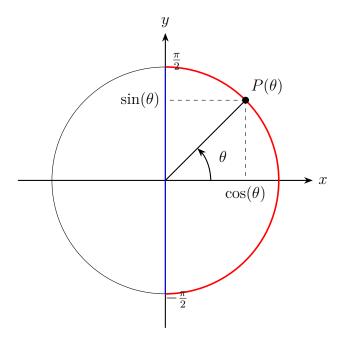


Figure 7: Chaque point de coordonées (0, y) du diamètre vertical admet un unique antécédent par la fonction sinus sur le demi-cercle droit.

On peut déduire d'après la figure 7, qu'elle est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-1, 1\right]$. Ainsi, il est légitime de définir sa fonction réciproque \sin^{-1} qu'on note arcsin, et on a

$$\arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$x \longmapsto \arcsin(x)$$

Proposition 1.5 (Propriétés de l'arcsinus). La fonction trigonométrique inverse arcsin est caractérisée par :

- Entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, la fonction sin est strictement croissante, ainsi arcsin est également strictement croissante sur [-1,1].
- On a

$$\begin{cases} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \\ \arcsin(0) = 0 \end{cases}$$

• Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

On considère la fonction tangente sur son intervalle de définition] $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ [, représentée sur la figure 8.

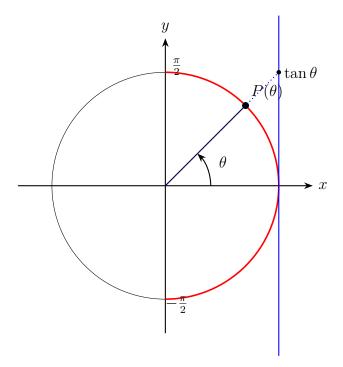


Figure 8: Chaque point de coordonées $y \in \mathbb{R}$ de la ligne verticale à droite admet un unique antécédent par la fonction tangente sur le demi-cercle droit.

On peut déduire d'après le tracé de la courbe, que la fonction tangente est bijective de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . Ainsi, il est légitime de définir sa fonction réciproque \tan^{-1} qu'on note arctan, et on a

$$\arctan: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$x \longmapsto \arctan(x)$$

Note 1.8. Les fonctions trigonométriques inverses servent à déterminer la valeur des angles à partir de son sinus, cosinus, ou sa tangente. Par exemple, $\cos(\theta) = 0.6$ implique que $\theta = \arccos(0.6)$ Les fonctions trigonométriques inverses servent ainsi en optique géométrique et en mécanique classique. Bref. ce sont des fonctions très utiles

Résumé du cours fonctions usuelles

Key point 1.1. • Une fonction f donne à chaque point x de son domaine de définition, un **unique** point y de son espace d'arrivée. On dit y est l'image de x par f, et x l'antécédent de y par f.

• Quand l'antécédent de x par f de tout point est également unique, on dit que la fonction est bijective, et on définit sa fonction inverse f^{-1} . [Elle n'a rien à voir avec $\frac{1}{f}$]

Key point 1.2. • On sait comment élever les nombres à des puissances entières $2^3 = 8, 5^3 = 125, 9^2 = 81 \cdots$

- Vous connaissez le nombre $\sqrt{2}$, vous savez aussi que $\sqrt{2}^2 = 2$ et que $(2^a)^b = 2^{ab}$, donc si on veut écrire $\sqrt{2} = 2^r$, on peut conclure que $r = \frac{1}{2}$. Vous découvrez donc que vous savez aussi élever les nombres à des puissances rationnelles.
- Mais notre cher orga Ali aime bien élever 2 à la puissance π , et calculer 2^{π} . Donc voici une **première raison**, qui nous pousse à parler de la fonction exponentielle qui généralise le concept de puissance, et elle est défini par

$$exp: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$

$$x \longmapsto e^x$$

Elle veut littéralement dire, lever le nombre de Néper e, (un nombre comme les autres, même s'il a l'air plus sophistiqué) à une puissance réelle x.

• La deuxième raison qui nous interpelle à parler d'exponentielle, est qu'elle est la solution de l'équation différentielle :

$$f' = f$$

Maintenant vous savez ce que cela veut dire, si vous voulez vous rappeler la démonstration, veuillez vous rendre à la proposition 2.4 du cours de dérivation. Et comme vos profs de mécanique ont pu vous faire comprendre, cette équation différentielle est assez présente en mécanique, donc il n'est pas anodin de vous l'introduire dans le contexte de ce camp.

Key point 1.3. Ce point est la conclusion des deux premiers points, nous avons défini la fonction exponentielle qui vérifie :

$$e^{x+y} = e^x e^y$$
 $e^0 = 1$ Loi de puissance
 $(exp)' = exp$ $(exp)'(0) = 1$ Solution d'équation différentielle

La fonction exponentielle est bijective comme le montre sa courbe, donc il est légitime de définir la fonction logarithmique, qui répond à la question, à quel puissance x

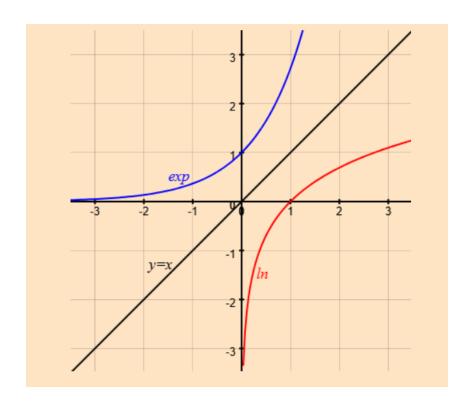
faut-il lever le nombre e pour trouver $y = e^x$?

$$\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(x)$$

On a pour $x, y \in]0, +\infty[$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

 $et \ln(e) = 1$



2 Dérivation

Motivation

On considère un car qui traverse le trajet entre deux villages Tleta-El Henchane et Sidi L'Mokhtar, de distance Δx en une durée Δt . On définit la vitesse moyenne du car par :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Cependant, le car ne garde pas une vitesse constante, il accélère à des moments, décélère à d'autres, donc la vitesse moyenne ne nous renseigne pas sur la vitesse instantanée du car à l'instant t_0 . Pour mieux s'en approcher, on observe le déplacement δx du car pendant un très court intervalle de temps $\delta t \ll 1$, centré autour de l'instant t_0 , c'est à dire entre $t_0 - \frac{\delta t}{2}$ et $t_0 + \frac{\delta t}{2}$, alors on peut approximer la vitesse instantanée à l'instant t_0 par

$$v_0 = \frac{\delta x}{\delta t}$$

Plus l'intervalle δt est petit, plus la distance δx est petite et plus cette estimation devient précise. Ce raisonnement nous pousse naturellement à envisager la notion de limite $\delta t \to 0$, quand δt s'approche de 0, ce qui mène à la dérivée, concept fondamental pour définir rigoureusement la vitesse instantanée.

2.1 Limites et continuité

2.1.1 Les fonctions

Définition 2.1 (Domaine de définition). Le domaine de définition d'une fonction f, noté \mathcal{D}_f , est l'ensemble des nombres réels qui admettent une image par la fonction f.

Pour les fonctions que nous considérerons, il y a trois cas principaux de valeurs non définies :

- **Dénominateur nul**: Pour $f(x) = \frac{a}{g(x)}$, il faut que $g(x) \neq 0$.
- Racine carrée d'un nombre négatif : $\sqrt{g(x)}$ n'est défini que pour $g(x) \ge 0$.
- Logarithme d'un nombre négatif ou nul : $\ln(g(x))$ n'est défini que pour g(x) > 0.

2.1.2 Limite d'une fonction en un point fini a

Définition 2.2 (Limite à droite et à gauche). Soit f une fonction numérique et $a \in \mathbb{R}$,

• On dit que L est la limite de f en a à gauche, si f(x) se rapproche de L à mesure que x se rapproche de a tout en restant inférieur à a $(x \le a)$, et on note $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

• On dit que L est la limite de f en a à droite, si f(x) se rapproche de L à mesure que x se rapproche de a tout en restant supérieur à a $(x \ge a)$, et on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Soit \mathcal{D}_f le domaine de définition d'une fonction f, on se permet de calculer la limite de f dans les points a tel que $a \in \mathcal{D}_f$ ou a sur son bord. Par exemple, si $\mathcal{D}_f =]a, +\infty[$, on peut calculer $\lim_{x\to a+} f(x)$, mais on ne peut se permettre de parler de la limite de $\lim_{x\to b} f(x)$ pour b < a y inclut la limite $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

- Si $a \in \mathcal{D}_f$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Pour les limites à bord, la limite peut être infinie comme les formes en $\lceil \frac{1}{0} \rceil$ ou $\lceil \ln(0) \rceil$. Plus rigoureusement, nous avons :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

(Voir cours sur les fonctions usuelles) et

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

- S'il existe "plusieurs" limites pour une fonction, alors il n'existe pas de limite. Et si la limite existe, elle est unique. $Exemple: \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas parce que la fonction continue d'osciller à l'infini.
- Des fois, la limite de f(x) quand x se rapproche de a à gauche, $\lim_{x\to a^-} f(x)$, diffère de la limite de f(x) quand x se rapproche de a à droite, $\lim_{x\to a^+} f(x)$.
- La fonction f n'admet pas de limite en un point $a \in \mathbb{R}$ dans les cas suivants :
 - Si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existent et sont finis, mais $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$
 - Si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)$ n'existe pas ou infini.
- On a " $\frac{1}{\pm \infty}$ " = 0, cependant " $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ ", " $\frac{0}{0}$ " ou " $+\infty \infty$ " sont des formes indéterminées, c'est-à-dire qu'on ne peut calculer la limite sans faire plus de simplifications.

Définition 2.3. Soit f une fonction et $a \in \mathcal{D}_f$, on dit que f admet une limite en a, $si \lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existent et sont finis, et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x)$$

2.1.3 Opérations sur les limites

Proposition 2.1. Soit f et g des fonctions sur un intervalle I, soit $a \in I$, on suppose que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent et sont finis, alors :

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$
$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Si f est une fonction constante, pour tout élément x de I, f(x) = c, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

Proposition 2.2 (Limite et ordre). Soit f une fonction définie sur I, soit $a \in I$, alors:

- $Si\ f(x) \ge 0 \ alors \lim_{x \to a} f(x) \ge 0.$
- $Si\ f(x) \le 0 \ alors \lim_{x \to a} f(x) \le 0.$

2.1.4 Règles de calcul de limites

Exemple Soit $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$, f est définie en tout point sauf 1, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$. On observe que 1 est sur le bord, donc on se permet de prendre des limites de f en 1. Comme le numérateur $x^2 + 1$ a bien une image dans le point x = 1 qui est 3. Alors seul le dénominateur qui sera problématique. On a

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

On remarque donc que la limite est infinie. Considérons maintenant la limite de la fonction g(x) = (x-1)f(x) en a=1, on voit que dans ce cas, on peut simplifier par (x-1) et la fonction devient $g(x) = x^2 + 2$, ainsi $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, et d'après ce qui précède

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 3$$

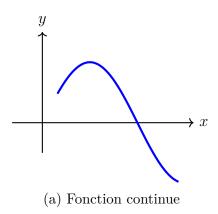
Notons toutefois que

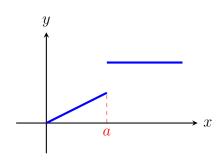
$$\lim_{x \to 1^{-}} g(x) = \lim_{x \to 1^{-}} (x - 1) f(x) = 3$$

Alors que si l'on essaie d'appliquer la proposition de multiplication des limites dans operations limites on aura $\lim_{x\to 1^-} (x-1) \times \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \times (-\infty)$ est une forme indéterminée, donc le deuxième point de la proposition 2.1 ne s'applique pas ici parce que la limite de f en 1 n'est pas fini.

2.1.5 Continuité

Définition 2.4. On dit que f est continue en un point a si $\lim_{x\to a^-} f(x) =$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. f est dite continue sur un intervalle I ou un segement [a, b] si elle est continue en tout point. Graphiquement, f est continue si sa courbe représentative ne présente pas un saut, un trou ou une coupure.





(b) Fonction discontinue en a (un saut): $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$

2.2 Dérivation : définitions et interprétations

2.2.1 Définition

Définition 2.5. Soit f une fonction continue sur [a,b], soit $x_0 \in [a,b]$, on dit que f est dérivable au point x_0 si la limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe, et on définit :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si f admet une dérivée en tout point de l'intervalle [a, b], on dit que f **est dérivable** sur cet intervalle. On note également (souvent en physique) :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

2.2.2 Interprétation géométrique du nombre dérivée

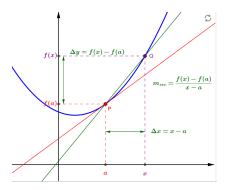
Définition 2.6 (Droite sécante). On considère la courbe d'une fonction f sur un repère orthonormé, avec P(a, f(a)) et Q(x, f(x)) deux points de cette courbe. On appelle **droite sécante entre** P **et** Q la droite

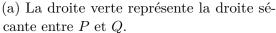
$$(PQ): y_0 = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x_0 - a) + f(a)$$

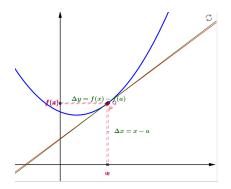
Définition 2.7. Soit f une fonction continue, dérivable sur \mathbb{R} , quand il existe, f'(a) est **le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative** de f au point d'abscisse a, qui a pour équation

$$(D): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Tangente vue comme limite d'une droite sécante : On peut dire alors, que la droite sécante entre le point P(a, f(a)) et Q(x, f(x)) devient la tangente de la courbe représentative de f au point a à la limite $x \to a$, quand $\lim_{x\to a} (x-a) = 0$.







(b) La droite rouge représente la tangente à la courbe de f en a.

Figure 10: Tangente vue comme limite d'un droite sécante

2.2.3 Variation d'une fonction interprétée par le signe de sa dérivée

La dérivée d'une fonction est une mesure de son taux de variation :

• Si f est continue et croissante sur [a, b], alors, pour $x_0 \in [a, b]$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si l'on considère la limite à droite, c'est-à-dire lorsque $x \to x_0^+$, on a $x \ge x_0$. Comme f est croissante, on a alors $f(x) \ge f(x_0)$. D'après la proposition 2.2, on en déduit que $f'(x_0) \ge 0$.

De même, si $x \to x_0^-$, alors $x \le x_0$, et donc $f(x) \le f(x_0)$. On conclut également que $f'(x_0) \ge 0$.

Note 2.1. Ce type de raisonnement s'appelle en mathématique, raisonnement par disjonction de cas, il est utilisé quand on ne peut pas formuler une démonstration dans le cas général, comme dans ce cas, pour $x \to x_0$ sans indiquer si la limite est à droite ou à gauche, on ne peut décider si $f'(x_0)$ est positive ou négative, alors on considère deux cas $x \le x_0$ ou $x \ge x_0$. La démonstration est considérée complète si tous les cas possibles sont traités.

Conclusion: Si f est croissante sur [a, b], alors $f' \ge 0$ sur [a, b].

- Si f est décroissante sur [a,b], alors :

En considérant la limite à droite, c'est-à-dire lorsque $x \to x_0^+$, on a $x \ge x_0$. Comme f est décroissante, on a $f(x) \le f(x_0)$, donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

D'après la proposition 2.2, on en déduit que $f'(x_0) \leq 0$.

En considérant maintenant la limite à gauche, c'est-à-dire lorsque $x \to x_0^-$, on a $x \le x_0$, et de même $f(x) \ge f(x_0)$, donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

ce qui conduit également à $f'(x_0) \leq 0$.

Conclusion : Si f est décroissante sur [a, b], alors $f' \leq 0$ sur [a, b].

• Si $f = C^{te}$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{C^{te} - C^{te}}{x - x_0} = 0$. Dans cette limite, il ne s'agit pas d'une forme indéterminée parce que $f(x) - f(x_0)$ s'annule avant même que x converge vers x_0 , donc $f'(x_0) = 0$.

Conclusion: Si f est constante sur [a, b], alors f' = 0 sur [a, b]

Figure 11: Représentation de $f(x) = x^2 + 1$ et les tangentes en a = -1.5, b = 0, c = 1.5

2.3 Dérivation : Propriétés et applications

2.3.1 Règles et propriétés de la dérivation

Proposition 2.3. Soient f et g deux fonctions dérivables sur le segment [a,b], pour c une constante, on a:

$$(f' + g')(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$
$$(f(g(x_0))' = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Si de plus, f est bijective, et $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Démonstration 2.1. On a :

$$(f' + g')(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Par linéarité de la limite, et aussi parce que les deux limites existent, on retrouve :

$$(f'+g')(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Il n'est pas compliqué de vérifier la seconde égalité, alors on se propose de montrer le

troisième cas :

$$(f(g(x_0))' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

En utilisant les propriétés de la limite du produit, et comme $\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}$ existe et $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ existe aussi, alors :

$$(f(g(x_0))' = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}\right) \left(\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Finalement pour la dernière dérivée de l'inverse, on considère l'égalité suivante qu'on va dériver ensuite :

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

En passant à la dérivée, et en appliquant la dérivée de la composée, démontrée ci-dessus, on a alors

$$(f^{-1})'(x)f'(f^{-1}(x)) = 1$$

Exercise 2.1. 1. Calculez f'(x) si $f(x) = x^r$ pour $r \in \mathbb{Q}$ et $x \neq 0$.

- 2. En déduire la dérivée de $g(x) = f^r(x)$ pour f fonction quelconque. Indication : Utilisez le troisième point de la proposition précédente.
- 3. Soient f et g deux fonctions dérivables sur un segment [a,b]. Trouvez $(fg)'(x_0)$ en fonction de $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$.
- 4. En déduire que si g ne s'annule pas sur le segment, alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proposition 2.4 (Dérivée des fonctions usuelles). Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(\sin)'(x) = \cos(x)$$

$$(\cos)'(x) = -\sin(x)$$

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan(x)^{2}$$

$$f'(x) = e^{x} \quad pour \quad f(x) = e^{x}$$

Pour x > 0, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

Démonstration 2.2. • Pour démontrer les trois dérivées trigonométriques, il suffit de démontrer la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

La figure 12 est une démonstration géométrique de l'inégalité :

$$\frac{\sin(x)}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan(x)}{2}$$

Notons que la surface de la portion du cercle est $S = \frac{x\pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$ Ainsi, on a

$$1 \le \frac{x}{\sin(x)} \le \cos(x)$$

Et on sait que $\lim_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=1$, donc quand $x\to 0$, la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ s'approche d'un nombre qui est compris entre 1 et 1, donc il ne peut être que 1 Ainsi $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=1$, et par les propriétés des limites des fonctions gentilles, on a alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{r} = 1$$

On commence par la dérivée du sinus, et on utilise la formule trigonométrique $\sin(x) - \sin(a) = 2\cos\left(\frac{a+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$, ainsi :

$$(\sin)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{2\cos\left(\frac{a+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \cos\left(\frac{a+x}{2}\right) \lim_{x \to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$$

$$= \cos(a) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(a)$$

• Pour la dérivée du cosinus, nous avons

$$(\cos)'(x) = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = -(\sin)'(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(x)$$

Le signe – provient de la dérivée de la composée et du fait que la dérivée de $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est égale à -1.

• Pour la dérivée du tangente, on utilise la formule de dérivée du quotient

$$(\tan)'(x) = \frac{(\cos)'(x)\sin(x) - \cos(x)(\sin)'(x)}{\cos^{1}(x)} = \frac{1}{\cos^{2}(x)} = 1 + \tan^{2}(x)$$

• On calcule maintenant la dérivée de l'exponentielle à partir de l'equation fonctionnelle qu'elle vérifie

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

On considère la dérivée de f par rapport à x (y est donc une constante). On note h(x) = x + y, soit h'(x) = 1 on a

$$(f \circ h)'(x) = h'(x)f' \circ h(x) = f'(x+y)$$

En appliquant l'égalité, nous trouverons

$$f'(x+y) = f'(x)f(y)$$

Pour x = 0, et sachant que f'(0) = 1 pour l'exponentielle népérien, on a alors f'(y) = f(y)

• Pour trouver la dérivée du logarithme, on applique la formule de la dérivée de l'inverse,

$$(\ln)'(x) = (\exp^{-1})'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

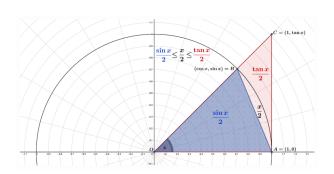


Figure 12: Comparaison géométrique de surfaces

Exercise 2.2. Montrez que si f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$(\ln(f))' = \frac{f'}{f}$$

Considérez la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \ln(x)$, et utilisez la formule de la dérivée de la composée $g \circ f$ ou $h \circ f$.

2.3.2 Continuité et Dérivabilité

Théorème 2.1. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Démonstration 2.3. Soit $a \in I$, calculons la limite de f(x) quand $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

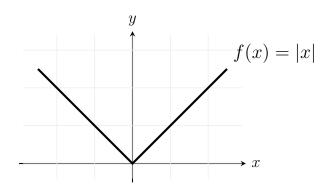
$$= f'(a) \times 0 = 0$$
(4)

On a le droit de prendre le produit des limites, parce que f est dérivable en a, donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. Ainsi $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, et f continue en a.

Cependant, une fonction **continue**, n'est pas toujours **dérivable**, nous présenterons deux exemples de fonctions, la première continue en tout point de \mathbb{R} et non dérivable en 0. Et le deuxième exemple d'une fonction continue sur \mathbb{R} et nulle part dérivable.

Exemple 1 : La valeur absolue On définit

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \ge 0\\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = \lim_{x \to 0^{-}} -x = 0$$
$$\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = \lim_{x \to 0^{+}} x = 0$$

Comme la limite de f(x) en 0 coïncide à droite et à gauche, alors f est continue en 0, on peut déduire ce résultat graphiquement.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \ge 0\\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Ainsi $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$. Ainsi, f est bien continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Exemple 2 : Fonction continue sur $\mathbb R$ nulle part dérivable On considère 0 < a < 1 et b > 3

$$f(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} a^k \cos(b^k \pi x)$$

Courbe de la fonction : Dans ce cas, la fonction «oscille beaucoup» en chaque point, qu'on ne peut pas capturer la variation de f en un point donné, donc en particulier la dérivée n'existe pas en ce point. Cette fonction a été proposée par deux mathématiciens Hardy et Weierstrass.

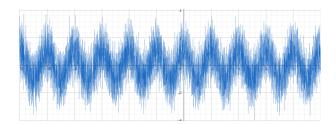


Figure 13: Fonction continue partout sur \mathbb{R} nulle part dérivable.

2.3.3 Dérivées partielles

En physique, il est courant de rencontrer **des fonctions à plusieurs variables**, c'est-à-dire des grandeurs qui dépendent de plus d'un paramètre. A titre d'exemple, la température T d'un objet peut dépendre à la fois de ses coordonnées dans l'espace (x,y,z) et du temps t, et on note T(x,y,z,t). Dans ce cadre, on parle de **dérivée partielle**, c'est à dire, dérivée de la fonction température par rapport à un paramètre des quatre. Et on note $\frac{\partial T}{\partial t}$ la dérivée partielle de T par rapport au temps t, $\frac{\partial T}{\partial x}$ la dérivée partielle de T par rapport au temps x, et ainsi pour les deux autres paramètres.

Règle de calcul Soit $f(x,y) = x^2y - xy^2 + y$, si on veut calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, on applique les règles de dérivation standard, on considère y comme une constante, ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - xy^2$$

De l'autre côté, pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à y, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en considérant x comme constante,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + 1$$

Une règle fondamentale est que :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Tous les hommes sont mortels. Socrate est homme. Donc Socrate est mortel... Tous les participants FMA sont motivés. Un élève motivé démontre les règles fondamentales.

Donc les participants FMA démontrent les règles fondamentales.

Note 2.2. On note
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

2.3.4 Dérivation d'un vecteur

On considère une fonction vecteur \vec{A} définie par :

$$\vec{A}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

 $x \longmapsto \vec{A}(x) = f(x)\vec{e_x} + g(x)\vec{e_y} + h(x)\vec{e_z}$

Si f, g, h sont des fonctions dérivables, alors la fonction vectorielle \vec{A} est aussi dérivable et sa dérivée est définie par :

$$\frac{d\vec{A}(x)}{dx} = \frac{df}{dx}\vec{e_x} + \frac{dg}{dx}\vec{e_y} + \frac{dh}{dx}\vec{e_z}$$

2.3.5 Développement limité d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, soit $a \in I$, on pose :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)$$

On peut vérifier que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, quand x est très proche de a, soit $x\to a$, souvent en physique, on néglige la partie $\varepsilon(x)$, et on considère :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Cette approximation s'appelle **développement limité de premier ordre**. Figuronsnous, que le côté droit de cette approximation n'est autre que l'équation de la tangente de la courbe de f au point a (Voir section 2.2.2). De plus, quand f a une expression difficile à manipuler, cette approximation linéaire facilite les choses.

Exercise 2.3. Soit f dérivable sur I, et f' également continue et dérivable sur cet intervalle. On appelle **développement limité de deuxième ordre** de f l'approximation suivante :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + c(x - a)^2$$

où c est une constante. Exprimez c en fonction de f''(a) où f'' est la dérivée de f'.

Résumé de Cours Dérivation

Key point 2.1 (Notion de limite). Calculer cette limite $\lim_{x\to a^-} f(x)$ revient à répondre à la question quand x s'approche de a à gauche, c'est-à-dire tout en restant inférieure à a, alors f(x) s'approche de quoi ? Et la limite $\lim_{x\to a^+} f(x)$ revient à répondre à la même question en supposant x s'approchant de a de droite (x > a). Quand ces deux limites sont égales et finies, on dit que la limite existe et on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) = \lim_{x \to a^{+}} f(x)$$

Key point 2.2 (La dérivée). La dérivée vient dans ce camp, pour nous sublimer du calcul rudimentaire des vitesses moyennes et nous inviter à faire des calculs de paramètres instantanés. Sans ce cours, vous n'aurez pas compris comment calculer l'intensité de pesanteur avec un pendule, ni comment poursuivre le cours des Ondes. La dérivée est tout simplement un calcul d'un taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand $x \to a$. Donc il s'agit de calculer une limite:

$$f('a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Proposition 2.5. Soient f et g deux fonctions dérivables sur le segment [a,b], pour c une constante, on a:

$$(f' + g')(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

$$(f + c)'(x) = f'(x)$$

$$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Si de plus, f est bijective, et $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Proposition 2.6 (Dérivée des fonctions usuelles). Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$(\sin)'(x) = \cos(x)$$

$$(\cos)'(x) = -\sin(x)$$

$$(\tan)'(x) = 1 + \tan(x)^{2}$$

$$f'(x) = e^{x} \quad pour \quad f(x) = e^{x}$$

Pôle Physique 2 Dérivation

Pour x > 0, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

Key point 2.3 (Développement limité). Le développement limité n'est pas un fantasme de la physique, c'est un concept mathématique rigoureux (avec une somme infinie), mais il n'est pas trop faux d'approximer $10^{24} + 1$ par 10^{24} . C'est ce que fait le développement limité de premier ordre :

$$f(x) \approx f(a) + f(a)(x - a)$$

Vous pouvez vous persuader vous-même (en faisant le calcul bien sûr) que quand un angle θ est très petit, alors on a

$$cos(\theta) \approx 1$$

$$sin(\theta) \approx \theta$$

$$tan(\theta) \approx \theta$$
(5)

3 Calcul Intégral

Motivation

Nous avons vu que si l'on dispose de la fonction x(t) qui donne la distance parcourue par un objet à chaque instant t, alors la vitesse instantanée est donnée par la dérivée de la fonction x(t) par rapport au temps $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Maintenant, inversons le problème, et supposons que nous disposons d'un "speedometer" pour mesurer la vitesse v(t) de l'objet à différents instants t, et on veut calculer la distance parcourue x(t).

Une première idée, serait de calculer les distances parcourues dx(t) pendant de très courtes durées dt centrées en un instant t_0 , et puis de faire une somme sur toutes ces distances "infinitésimales" pour trouver la distance finale :

$$\Delta x(t) = \sum \delta x(t)$$

Et on sait d'après la loi de la vitesse que $\delta x = v(t)\delta t$. Et on a plus δt est petit, plus la précision augmente, ainsi on a

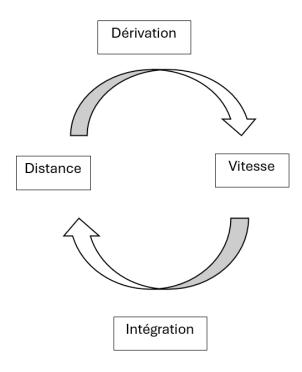
$$\Delta x(t) = \lim_{\delta t \to 0} \sum v(t) \delta t$$

Cette limite "grossière" est ce qu'on appelle **intégrale**, qu'on note $\int_{t_i}^{t_f}$ où t_i l'instant initial, et t_f est l'instant final où on veut calculer la distance, et on écrit

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v(t)dt$$

Ainsi, on a déduit la distance Δx en fonction de la vitesse, qui n'est d'autre que l'intégrale de la vitesse v(t). On conclut à ce stade deux intuitions sur l'intégrale :

- L'intégrale est une somme infinie dans \mathbb{R} .
- On voit aussi que le calcul de distance est une intégrale de vitesse. Et on sait que la vitesse est une dérivée de distance.



3.1 Calcul de primitives

Définition 3.1. L'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Si f, fonction continue sur le segment [a,b], est la fonction dérivée de la fonction F, alors F est dite la primitive de f, et on définit l'intégrale de la fonction f par :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Et dans la suite, on utilisera la notation : $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Note 3.1. Notons que la primitive n'est pas unique, tant que la dérivée d'une constante est 0. Donc si F est la primitive d'une fonction continue sur [a,b] f, alors F+c est aussi primitive de f pour tout $c \in \mathbb{R}$. On a donc une infinité de primitives pour toute fonction continue sur un segment. Ainsi, on voit que le calcul intégral repose nécessairement sur le calcul des primitives.

Fonction	Primitive
$\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + C$
$x^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \\ \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C \\ \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C \end{vmatrix}$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
u' + v'	u+v+C
$\alpha u'$	$\alpha u + C$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$f' \circ g \times g'$	$f \circ g + C$

Proposition 3.1. Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b] c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx$ existe et finie.

Proposition 3.2. Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a, b, c trois éléments de I. Soit α un réel, on a:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ (Relation de Chasles)

Démonstration 3.1. On démontrera les deux premiers points et le dernier point, le reste est facile à vérifier.

• Soit F la primitive de f sur I,

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{c} f(x)dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_{a}^{c} f(x)dx$$

Note 3.2 (Différence entre primitive et intégrale). Ce qu'il faut comprendre c'est que la primitive d'une fonction est également une fonction définie sur un intervalle. Alors que l'intégrale est un nombre, c'est la différence des images de la primitive entre deux points donnés. A titre d'exemple, le calcul de la vitesse à partir de l'accélération est une primitive, parce qu'on veut savoir la vitesse en tout point. De l'autre côté, le calcul du travail du point A au point B d'une force \vec{F} à partir du déplacement élémentaire $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$ est une intégrale, parce qu'on a les bornes d'intégration et cela donne un nombre.

3.2 Techniques d'intégration

Quand on est amené à calculer l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ et que f n'a pas la tête d'une primitive usuelle, alors il existe des techniques d'intégration qui ramènent les calculs à des cas usuels. On verra dans cette section deux méthodes très puissantes : l'intégration par parties et le changement de variables.

3.2.1 Intégration par parties

L'intégration par parties repose sur la dérivée du produit, c'est une manière de contourner les problèmes de calcul de primitives. Ainsi, si l'intégration était un jeu, alors les primitives est le premier niveau, et si vous comprenez ces techniques d'intégration, alors un niveau avancé du jeu unlocked. A vous de jouer les amis!

Définition 3.2. Soient f, g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et f' et g' sont continues sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a:

$$\int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx = \int_{a}^{b} (fg)'(x) = [f(x)g(x)]_{a}^{b}$$

Ainsi si une expression est identifiée comme étant f'g, alors on identifie les termes et on procède comme suit :

$$\int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx$$

Exercise 3.1. Calculez les intégrales suivantes :

- $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$ avec $f'(x) = \cos(x)$ et g(x) = x
- $B = \int_{e}^{e^2} \ln(x) dx$ avec f'(x) = 1 et $g(x) = \ln(x)$

3.2.2 Changement de variable

L'idée du changement de variable vient en physique, pour simplifier les choses tout d'abord, ou pour déduire une loi sans se casser la tête avec les détails du calcul, comme c'est le cas de la déduction de la loi de Stefan-Boltzmann à partir de la loi de Planck (voir Thermodynamique 1 et Maths Recap). Il faut aussi comprendre une chose, c'est que les fonctions mathématiques sont appliquées à des paramètres sans dimension. Si on écrit $\cos(wt)$, on doit bien s'assurer que x = wt est sans dimension, ce qui est le cas car le temps est en s et la pulsation w en s^{-1} .

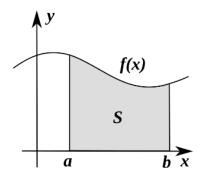
Définition 3.3. Soient g une fonction dérivable et monotone (croissante ou décroissante) sur [a,b] tel que g' continue sur [a,b], et f une fonction continue sur g([a,b]), on a:

$$\int_{a}^{b} f \circ g(x).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Cette propriété est appelée changement de variable en posant la nouvelle variable u = g(x), et l'identification vient de $f \circ g(x) = f(u)$ et g'(x)dx = dg = du.

3.3 Interprétation géométrique des intégrales

On considère la surface S en dessous de la courbe C_f de f dans un repère orthonormé, délimité par la droite $(D_1): x = a$ et la droite $(D_2): x = b$ et l'axe des abscisses. On se propose de lier cette surface S à l'intégrale de f entre a et b.



On découpe le segment [a,b] en n petits morceaux pour construire des rectangles s'appuyant sur chaque portion de segment ainsi que sur la courbe f. On considère une subdivision $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ telle que $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, tous les rectangles sont donc de même largeur $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$, et pour la longueur on prend $f(x_k)$ ou $f(x_{k+1})$. On retrouve alors la somme $S = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + \frac{b-a}{n}k)$.

Et on peut voir que pour n très grand, rigoureusement quand on fait la limite de cette somme, on retrouve exactement la surface $S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + \frac{b-a}{n}k)$.

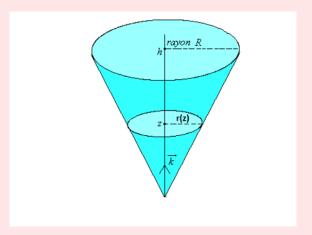
Proposition 3.3. Soit f une fonction continue sur [a,b], on peut définir l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par une limite de somme de Riemann:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$$

Ainsi, on arrive à ce que l'intégrale $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = S$ est en vérité un calcul de la surface S en dessous de sa courbe C_f . Elle concrétise l'idée que l'intégrale est une somme sur une droite continue, et on a $\frac{b-a}{n}$ capture dx.

Note 3.3. La propriété 3.11 est pratique à la fois pour le calcul des intégrales quand la somme S est connue, ou pour le calcul des limites quand l'intégrale de la fonction f est facile à calculer.

Exercise 3.2. On considère un cône de rayon de base R, et de hauteur h, et on se propose de calculer son volume.



Question -1 On considère r(z), le rayon de la section circulaire du cône (la surface parallèle à la base du pyramide) à la hauteur z, montrez que $r(z) = \frac{Rz}{h}$.

Question -2 Trouvez l'aire A(z) d'un cercle de rayon r(z).

Qusetion -3 Retrouvez le volume du cône en intégrant sur son volume élémentaire dV = A(z)dz.

Les équation différentielles

Définition 3.4. Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction inconnue à ses dérivées.

Autrement dit, c'est une équation qui contient :

- une fonction, comme f(x) ou y(t).
- une ou plusieurs de ses dérivées, comme f'(x) ou $\frac{dy}{dt}$.

3.4 Les équations différentielles en physique

En physique, beaucoup de phénomènes varient dans le temps ou dans l'espace, ce qui rend les équations différentielles indispensables.

Exemples:

Phénomène	Équation différentielle associée
Mouvement d'un objet	$a = \frac{dv}{dt}, F = ma$
Circuits électriques	$\frac{dI}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$
Propagation d'une onde	$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Proposition 3.4. Parmi les techniques utilisées pour résoudre les équations différentielles, on a les intégrales, en utilisant notamment les primitives ou les différentes techniques d'intégration.

Exercise 3.3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$f'(x) = \lambda f(x)$$

où λ est une constante réelle donnée.

Résumé du Calcul Intégral

Key point 3.1. La primitive d'une fonction f est une fonction F tel que F' = f, ainsi la vitesse est une primitive de l'accélération, et la distance est une primitive de la vitesse. L'intégrale est un nombre, comme la calcul du travail entre un point A et un point $B: W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Fonction	Primitive
$\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + C$
$x^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
u' + v'	u+v+C
$\alpha u'$	$\alpha u + C$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$f' \circ g \times g'$	$f \circ g + C$

Key point 3.2. On considère l'équation différentielle (une équation de la fonction f et de ses dérivées) suivante : f' = af alors

$$f(x) = Ae^{ax}$$

où A est une constante.

Key point 3.3. On peut vérifier que la fonction

$$f(x) = A\cos(ax) + B\sin(ax)$$

où A et B des constantes, est une solutions de l'équation différentielle de

$$f'' + a^2 f = 0$$

où f'' = (f')'

4 Thermodynamique 1 : Température de la Terre

4.1 Introduction

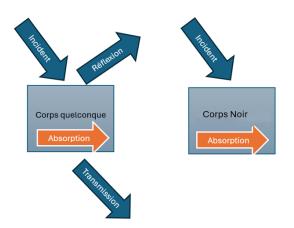
Tout au long de cette semaine, vous avez assemblé un bagage énorme de connaissance en physique. Le **PFD** (Principe Fondamental de la Dynamique) semble la source de toutes les lois de physique : un axiome de notre univers que seul un génie comme Newton pouvait postuler. Toutefois, à la fin du 19ème siècle, on savait déjà que le **PFD** ne pouvait pas tout expliquer, plus précisément, les lois physiques énoncés à l'époque ne pouvaient pas expliquer une expérience physique en particulier : le rayonnement du corps noir.

La physique est définitivement constituée avec ses concepts fondamentaux; tout ce qu'elle peut désormais apporter, c'est la détermination précise de quelques décimales supplémentaires. Il y a bien deux petits problèmes : celui du résultat négatif de l'expérience de Michelson et celui du corps noir, mais ils seront rapidement résolus et n'altèrent en rien notre confiance." Cette phrase, souvent citée, mais jamais référencée, est faussement attribuée à Lord Kelvin. Elle permet néanmoins de bien poser le cadre de notre aventure suivante. On se permet de signaler que le problème du corps noir, marque le début d'un basculement énorme de la physique, c'est la naissance de la physique quantique. Ne vous inquiétez-vous, vous allez comprendre ce terme exotique "corps noir"dans ce cours. Néanmoins, nous n'allons pas considérer l'expérience de Michelson, et il n'est pas nécessaire de l'étudier pour construire le socle pédagogique de ce camp.

4.2 Loi de Planck

4.2.1 Définition

Un corps noir est un corps qui absorbe tout rayonnement qu'il reçoit, peu importe la longueur d'onde de la radiation reçue, sans rien transmettre, ni réfléchir, ni diffuser. Ce corps, à l'équilibre thermodynamique, émet toute l'énergie qu'il a reçu. Toutefois, le spectre de l'émission, *i.e* la contribution de chaque longueur d'onde dans la puissance émise, ne dépend que de la température du corps, et non de sa composition chimique.



4.2.2 Loi de Planck

Prenons l'exemple d'un forgeron qui chauffe une barre métallique pour produire une épée, lorsque la barre est suffisamment chauffée, elle devient rouge. Cette propriété n'est pas

unique pour le fer, elle est vraie quel que soit le corps. Mieux encore, la température nécessaire pour un rayonnement rouge est la même pour tous les corps. La fameuse loi de Planck nous donne la formulation mathématique : tout corps de température T>0 rayonne dans toutes les longueurs d'ondes λ selon la relation suivante :

$$L(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

avec:

- hest la constante de Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}~\mathrm{J\cdot s}$
- c est la célérité de la lumière $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- k_B la constante de Boltzman, $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Cette formule est effrayante, certes, elle **n'est pas à retenir**. Ce qu'il faut savoir, c'est l'allure de la courbe :

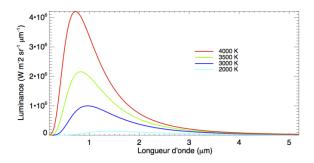


Figure 14: La courbe admet un maximum global de luminance.

Remarque Le raisonnement de Planck pour établir sa loi était révolutionnaire pour son époque. Il est le premier à penser que l'échange d'énergie entre la matière et la lumière est quantifié. Pour lui, l'énergie lumineuse est comme le beurre, elle n'est pas quantifiée, mais quand un vendeur propose du beurre, il propose de le vendre selon des galettes de 200g. Un acheteur ne peut qu'avoir une quantité de beurre qui soit un multiple de 200g. L'échange est quantifié.

En effet, Planck n'a pas osé contredire la mécanique classique et dire que l'échange énergétique est quantifié, ce n'est qu'une nécessité calculatoire, un biais mathématique pour expliquer le rayonnement du corps noir. Une explication physique acceptable et surtout compatible avec les lois classiques. Il fallait attendre un certain Albert Einstein pour oser postuler une quantification à proprement dit, c'est la naissance de la physique quantique.

4.2.3 Loi de Wien

Une conséquence directe de la loi de Planck, c'est qu'on a un maximum de l'énergie rayonnée à une longueur d'onde bien donnée. Mathématiquement, cela correspond au point où la dérivée s'annule.

Théorème 4.1 (Loi de Wien). Le point du maximum global de la courbe de luminance λ_{max} est relié à la température par la relation :

$$\lambda_{max}T = 2.899 \times 10^{-3} K.m$$

Démonstration 4.1. On considère la fonction $L(\lambda, T)$, on dérive par rapport à λ , c'est-à-dire on considère T comme constante.

$$\frac{dL(\lambda,T)}{d\lambda} = \frac{-5\lambda^{-6}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} + \frac{\frac{hc}{\lambda^2 k_B T} e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)^2}$$

Le maximum global de la courbe correspond au point λ_{max} tel que

$$\frac{dL(\lambda, T)}{d\lambda}(\lambda_{max}) = 0$$

Pour $x_{max} = \frac{hc}{\lambda_{max}k_BT}$, on a

$$\frac{dL(\lambda, T)}{d\lambda}(\lambda_{max}) = 0 \iff 5(1 - e^{-x_{max}}) = x_{max}$$

Cette équation est résolue numériquement en considérant le point d'intersection de la fonction exponentielle et la fonction affine et la solution numérique donne $x_{max} = 4.965$, soit en remplaçant h, c et k_B par leurs valeurs, on trouve la relation :

$$\lambda_{max}T = 2.899 \times 10^{-3} K.m$$

Exercise 4.1. Sachant que la longueur d'onde du jaune est 500nm, estimer la température de la surface du soleil.

Corrigé: En utilisant la loi de Wien, on trouve $T_S = 5800K$

4.3 Équilibre thermodynamique

Définition 4.1. Un système est dit en équilibre thermodynamique s'il est en équilibre mécanique et s'il est un équilibre thermique.

L'équilibre mécanique veut dire que la somme des forces extérieures est nulles, on parle de corps pseudo-isolé. L'équilibre thermique provient quand l'échange total du corps avec l'extérieur en termes de chaleur est nul.

4.3.1 Loi de Stefan-Boltzmann

La loi de Stefan-Boltzmann est une autre conséquence de la loi de Planck. Elle s'obtient en intégrant $L(\lambda, T)$ selon toutes les λ possible, *i.e* de 0 à $+\infty$. Vous trouverez un exercice en

Math Recap qui démontre la loi de Stefan-Boltzmann à partir de la loi de Planck, on vous invite à le consulter, mais sachez qu'il est un peu avancé. On obtient ainsi que la puissance rayonnée par unité de surface est proportionnelle à T^4 . La loi s'énonce mathématiquement comme suit :

$$\frac{P}{S} = \psi = \sigma T^4$$

Où $\sigma \approx 5.670374 \times 10^{-8} \text{W} \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$, P la puissance rayonnée, et S la surface latérale de l'objet, et ψ est le flux défini par cette même relation comme le quotient de la puissance par la surface.

4.4 Puissance reçue par la terre

Comme on va faire des applications qui concernent des objets plutôt sphériques, on rappelle l'expression de la surface d'une sphère :

$$S = 4\pi R^2$$

On aura besoin également des données numériques suivantes :

- Rayon du soleil $R_S = 6.963 \times 10^5 \text{km}$
- Température du soleil $T_S = 5800K$
- Rayon de la terre $R_T = 6400 \text{km}$
- Distance entre la Terre et le Soleil $TS = 1,495 \times 10^8 \text{km}$
- Pour les applications numériques, la température est prise en kelvin $T(^{\circ}C) = T(K) 273,15$

On peut ainsi déduire la température de la terre : On calcule le flux rayonné par le soleil, nommons-le $\psi_S = \sigma T_S^4$. Par conservation de la puissance, on a égalité entre la puissance au niveau du soleil et celle au niveau de la terre. Or, comme la puissance est rayonnée au niveau de la surface latérale, on obtient :

$$\psi_S 4\pi R_S^2 = \psi_T 4\pi T S^2$$

où ψ_T le flux reçu par la terre.

Toutefois, pour calculer la puissance totale reçue par la terre, il faut multiplier ψ_T par la surface efficace, soit la surface du disque de rayon R_T , le rayon de la terre. À l'équilibre thermodynamique, on aura égalité entre la puissance totale que reçoit la terre et la puissance rayonnée par celle-ci, on peut calculer ainsi le flux rayonné par la terre (à travers la surface latérale) et déduire, d'après la loi de Stéphane, la température terrestre.

Puissance totale reçue par la terre :

$$P_T = \psi_T \times \pi R_T^2$$

Puissance totale rayonnée : (équilibre thermodynamique)

$$P_{T'} = P_T$$

Flux rayonné, à travers la surface latérale :

$$\psi_T' = \frac{P_{T'}}{4\pi R_T^2}$$

Loi de Stéphane :

$$T_1 = \sqrt[4]{\frac{\psi_T'}{\sigma}}$$

Conclusion:

$$T_1 = \sqrt[4]{\frac{R_S^2}{TS^2}} T_S = 279.81 K = 6.81^{\circ} C$$

Note 4.1. On voit que dans la formule finale, la température ne dépend pas de la taille de la terre, ce qui n'est pas évident à première vue.

4.5 Effet de l'albédo

En fait, on a fait une hypothèse assez réductrice qui est que la terre était un corps noir, et donc absorbe toute l'énergie qu'elle reçoit. Cela n'est évidemment pas le cas, et on a alors une quantité d'énergie qui est réfléchie. On définit le coefficient d'albédo, noté A, comme la proportion de puissance lumineuse réfléchie.

Dans ce qu'on a fait jusqu'à présent, on n'a jamais tenu en compte l'effet de l'atmosphère, c'est bien le thème de l'application suivante. Toutefois, pour l'application numérique ici, on prend le coefficient d'albédo celui de l'atmosphère, donc environ A=0.30.

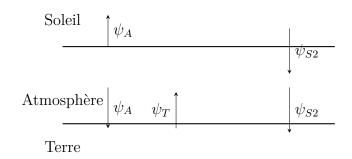
Le calcule de la première partie sera le même, sauf que cette fois-ci, on prendra $\psi_{S2} = (1 - A)\psi_S$. On obtient $T_2 = \sqrt[4]{1 - A}T_1 = 255.97K = -17.03 r$

L'albédo a pour effet de diminuer la température, on voit alors que les T_1 et T_2 sont beaucoup trop basses par rapport à la réalité, et ne conviennent pas à la vie terrestre. Nous avons ignoré l'effet d'un autre élément : l'atmosphère.

4.6 Effet de l'atmosphère

4.6.1 Atmosphère parfaitement transparente

On peut voir d'après les applications numériques précédentes que, sans atmosphère, la terre sera trop froide pour héberger de la vie. Heureusement, la nature est bien faite, et on va voir que l'atmosphère va doubler, ou presque, le flux qu'on reçoit.



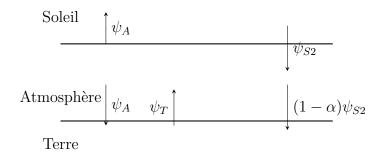
On fait d'abord l'hypothèse que l'atmosphère est parfaitement transparente pour la lumière visible, et parfaitement opaque pour l'infrarouge. En se plaçant à l'équilibre thermodynamique, en faisant un bilan radiatif sur l'atmosphère et la terre, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \psi_{S2} + \psi_T = & \psi_{S2} + 2\psi_A \text{ Bilan sur l'atmosphère} \\ \psi_{S2} + \psi_A = & \psi_T \text{ Bilan sur la terre} \end{cases}$$

On élimine ψ_A , on obtient $\psi_T = 2\psi_{S2}$. On obtient bien le fait que l'atmosphère double la puissance reçue au niveau de la terre. Et d'après la loi de Stéphane, on a $T_3 = \sqrt[4]{2}T_2 = 304.36K = 31.36^{\circ}C$

4.6.2 Atmosphère réelle et effet de serre

L'hypothèse que l'atmosphère était parfaitement transparente pour le visible n'est pas réaliste : d'une part, d'après la loi de Planck, une partie du flux rayonnée par le soleil est bien dans l'infrarouge, d'autre part, les gaz qui constituent l'atmosphère absorbent un peu de chaleur, c'est l'effet de serre.



Ainsi, une partie $\alpha \psi_S$ est absorbée par l'atmosphère, et le bilan radiatif devient :

$$\begin{cases} \psi_{S2} + \psi_T = (1 - \alpha)\psi_{S2} + 2\psi_A \\ (1 - \alpha)\psi_{S2} + \psi_A = \psi_T \end{cases}$$

On élimine ψ_A , on obtient $\psi_T = (2 - \alpha)\psi_{S2}$. On prend $\alpha = 0.30$, cette valeur dépend de la concentration des gaz à effet de serre dans l'atmosphère. D'après la loi de Stéphane, on a $T_4 = \sqrt[4]{2 - \alpha}$ $T_2 = 292.28K = 19.28^{\circ}C$. Ce qui est bien réaliste et reflète très bien la température moyenne de la terre. La nature est bien faite, la terre n'est ni trop loin, ni trop proche du soleil, mais idéalement placée pour héberger la vie.

Conclusion

On remarque que la température finale dépend du rayon du soleil, la distance soleil terre, l'Albédo et l'effet de serre. Ainsi, on en déduit pour une planète P qui tourne autour d'une étoile E, et dont le coefficient d'Albédo et A et α le coefficient reflétant l'effet de serre, la température sera :

$$T_P = \sqrt[4]{\frac{R_E^2(1-A)(2-\alpha)}{PE^2}} \frac{\beta}{\lambda_{max}}$$

Où $\beta=2.899\times 10^{-3} K.m$ la constante de Wien, et λ_{max} la longueur d'onde correspondante à la couleur de l'étoile. Dans la pratique, il faut tenir compte du red-shift qui intervient dû à l'expansion de l'univers. Une fois cela fait, on peut accéder à la lumière réelle de l'étoile, et si l'on cherche une vie semblable à la nôtre, on doit chercher une planète avec presque les mêmes propriétés et donc même α , A et surtout même T. Nous avons déterminé la zone habitable pour chaque étoile! Notre quête pour la vie extraterrestre ne fait que commencer!

5 Mouvement

Ce chapitre est une brève introduction au mouvement. Dans cette première partie, nous examinerons d'abord ce que signifie être en mouvement, ainsi que les référentiels. Nous montrerons ensuite que le mouvement est relatif et nécessite un référentiel pour être bien défini. Nous passerons rapidement à la manière de décrire mathématiquement le mouvement en utilisant des systèmes de coordonnées. Au cours de cette introduction, nous considérerons certaines classes importantes de mouvements. Jusqu'à ce point, nous ne nous aurons pas demandé pourquoi les choses bougent, mais uniquement comment. Ce n'est qu'en abordant les lois de Newton que nous établirons un lien entre le mouvement et ses causes. Voilà le cadre philosophique dans lequel nous décrivons le mouvement en physique newtonienne.

5.1 Introduction

5.1.1 Mouvement

Pour déterminer les lois régissant le changement, il faut de prime abord pouvoir *décrire* le changement. Le changement le plus simple qu'on peut observer est la variation des positions des objets dans le temps qu'on qualifie de **mouvement**.

On peut décrire tout objet par un grand nombre de particules qui le constituent, c'est pour cette raison qu'on commence par traiter le mouvement d'une particule représentée par un point sans degrés de libertés internes². Nous allons commencer par traiter le mouvement en une dimension de l'espace avant de généraliser naturellement au cas multidimensionnel.

Bien que le mouvement puisse sembler facile à décrire de la vie de tous les jours, il y a beaucoup de subtilités qui apparaissent directement quand on contemple le sujet. Considèrons par exemple la blague classique: Un policier arrête une dame dans une voiture. Le policier se pointe et lui dit: "Madame, vous avez dépassé la vitesse limite de 60km.h⁻¹." Elle répond: "Monsieur, ce que vous racontez est impossible, ça fait à peine 7 minutes que j'ai commencé à rouler. Comment pourrais-je aller à 60km.h⁻¹ si j'ai pas conduit pendant une heure?". Cette blague démontre, de manière grossière certes, le paradoxe au cœur de la description mathématique du mouvement. Si ça n'a pas suffi à vous démontrer le problème. On pourrait considèrer le paradoxe de Zénon³, qui a époustouflé les esprits les plus brillants de la Grèce antique⁴. Le paradoxe procède de la façon suivante:

Ssi Brahim veut rattraper une tortue. Ssi Brahim est 10 fois plus rapide que la tortue. Supposons que la tortue est à 100m de Ssi Brahim. Quand Ssi Brahim parcourt 100m, la tortue prend l'avance et parcourt 10m. Ensuite, Ssi Brahim parcourt les 10m, la tortue prend l'avance en parcourant 1m, à l'infini. Ssi Brahim ne va jamais rattraper la tortue. Pourtant ce n'est pas ce qui se passe dans la vraie vie! Paradoxe!

²Qui ne peut pas tourner autour de lui-même, ni se comprimer ou se dilater.

³Zénon d'Élée, philosophe grec v-ème siécle avant notre ère.

⁴C'est une histoire fascinante, Zénon l'a énoncé pour soutenir la doctrine de Parménide selon laquelle le mouvement serait une illusion!

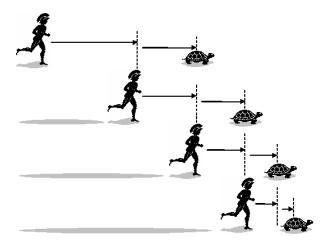


Figure 15: Ssi Brahim et la tortue [1].

Pour aboutir à une résolution tout à fait satisfaisante de ce paradoxe, il faudrait attendre les travaux de Newton (et Leibnitz). Soit à peu près 2100 ans!

5.1.2 Relativité du mouvement

Supposons que l'on veuille vous placer dans un vaisseau spatial, en mission autour du Soleil. Le vaisseau se déplacera à la vitesse gigantesque de 30km par seconde. Seriez-vous

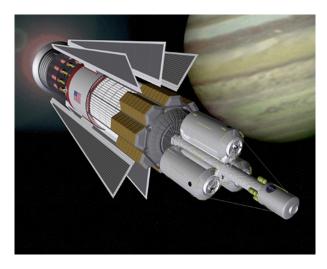


Figure 16: Vaisseau spatial Orion, source: NASA

partants pour une telle mission? Y survivriez-vous?

Sans que vous le sachiez, vous êtes déjà dans une mission semblable, puisque la Terre est déjà un vaisseau spatial en orbite autour du Soleil à environ cette vitesse. Pourtant, vous ne ressentez jamais rien, n'est-ce pas ? Cela est dû à la notion de relativité du mouvement : le mouvement ne peut être défini qu'à partir de l'objet qui le mesure. Pour le Soleil, vous êtes en pleine mission spatiale insensée, mais pour vous, c'est le Soleil qui bouge tout le temps. Par rapport au centre de la Voie lactée, vous et le Soleil êtes exactement sur la même trajectoire.

Nous arrivons ainsi à notre premier principe du mouvement, connu sous le nom de

relativité galiléenne. Le mouvement⁵ est relatif et ne peut être défini que par l'observateur. De plus, pour l'observateur, il est toujours au repos et se situe au centre de son univers. L'observateur suit la position de tous les objets à tout instant.

Illustrons cela par un autre exemple. Supposons que vous marchiez dans un bus roulant à 60km.h⁻¹. Supposons que vous marchiez à un rythme décent de 5km.h⁻¹ dans le même sens du déplacement du bus. Quelle est votre vitesse? Par rapport à une personne assise de l'autre côté de la rue, vous vous déplacez à une vitesse de 65km.h⁻¹, mais pour les gens dans le bus, vous ne marchez qu'à une modeste vitesse de 5km.h⁻¹.

Notre façon intuitive de concevoir le mouvement est de toujours supposer que le sol sous nos pieds est au repos. Cela a du sens pour des créatures telles que nous, mais ce n'est en aucun cas absolu. On peut aller encore plus loin : on vous a appris que la Terre orbite autour du Soleil et que le Soleil est au repos. Ce n'est là encore absolument pas une vérité absolue. Par rapport au centre galactique, où résident d'immenses étoiles et des trous noirs, le Soleil, avec tout le système solaire, tourne lui-même avec la galaxie. Et cela peut être poussé encore plus loin. Par rapport aux étoiles et galaxies lointaines, notre chère Voie lactée se dirige vers sa plus proche voisine, Andromède, et entrera bientôt en collision avec elle. Inutile de dire que même cette perspective peut être repoussée si l'on considère l'expansion de l'univers, mais cela dépasse le cadre de ce cours.

Cela devrait suffire à montrer que notre manière intuitive de concevoir le mouvement n'est pas absolue, mais consiste simplement à prendre le sol comme notre référentiel habituel.

5.2 Référentiel et coordonnées

Vous êtes en train de marcher dans la rue pour aller au lycée, une voiture s'arrête à côté de vous et vous demande: "C'est où la pharmacie, s'il vous plaît ?". Si vous n'êtes pas de Rabat, vous allez lui dire quoi? "Allez tout droit et tournez à gauche". Cette situation contient toute l'intuition nécessaire à ce cours. Vous venez d'indiquer dans votre référentiel la position, correcte si vous n'êtes pas de Rabat, par les coordonnées cartésiennes de la pharmacie.

Nous allons maintenant donner un sens plus formel à ce qu'on vient de décrire.

5.2.1 Référentiel

Nous allons donner un sens concret à la notion d'un référentiel

Définition 5.1. Un référentiel est un observateur, muni d'une horloge, qui à tout instant mesure la position de tous les objets. Il est assis à l'origine O.

La position est identifiée avec les coordonnées, l'équivalent de :"Allez tout droit, et tournez à gauche".

5.2.2 Position

Considérons maintenant notre observateur en O, et une fourmi M se déplaçant selon l'axe x.

⁵Par mouvement, j'entends non seulement le fait qu'un objet se déplace ou non, mais aussi sa trajectoire, sa vitesse et son accélération.

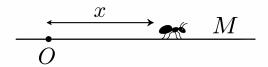


Figure 17: Fourmi sur une ligne, x est une grandeur algébrique négative à gauche et positive à droite (convention).

Nous décrivons la position de M en utilisant ses coordonnées (x_M) sur la droite. Évidemment, la position de cette fourmi dépend du temps. Une manière plus formelle est de voir x_M comme une fonction du temps t, soit $x_M(t)$.

Supposons maintenant que nous voulions définir une vitesse pour notre fourmi en chaque point.

5.2.3 Vitesse

Comme vous l'avez vu dans votre cours de mathématiques, le vitesse peut être définie en utilisant la notion de dérivée, soit :

$$v_m(t) = \frac{dx_m}{dt}$$

5.3 En 3 dimensions

5.3.1 Vecteur position

Pour généraliser le suivi de la position et de la vitesse en 2 et 3 dimensions, il faut utiliser la notion de vecteur. Ainsi, au lieu d'avoir une position algébrique, on va définir un vecteur position \overrightarrow{OM} .

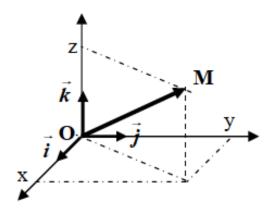


Figure 18: Vecteur position en 3D [2].

Le vecteur position est déterminé par ses 3 projections :
$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
.

5.3.2 Vecteur vitesse

On définit également le vecteur vitesse, vecteur dont les composantes sont les dérivées

des composantes de la position
$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$$
.

Le vecteur vitesse indique la direction que va suivre le mobile.

5.4 Accélération

La vitesse n'est pas un concept absolu, on ne peut pas *ressentir* la vitesse car elle dépend de l'observateur (référentiel Galiléen pour être précis). En revanche, cela n'est pas vrai pour l'accélération, que l'on peut effectivement mesurer, et qui est indépendante du référentiel Galiléen considéré.

L'accélération est le taux de variation de la vitesse ; elle s'exprime en mètres par seconde, *par seconde*. Autrement dit, combien d'unités de vitesse on gagne ou on perd par unité de temps.

Définition 5.2. Notons pour notre fourmi M, $a_M(t)$ l'accélération. $a_M = \frac{dv_M}{dt}$. On peut également l'exprimer comme $a_M = \frac{d^2x_M}{dt^2}$. Notons que c'est d^2 et dt^2 . Je vous laisse contempler ce choix.

Nous allons maintenant essayer de comprendre comment une trajectoire donnée se traduit en coordonnées ; pour cela, commençons par étudier certains cas importants :

5.5 Etude de situations importantes

Nous allons commencer par le mouvement rectiligne uniforme, la situation qu'on obtient quand la somme des forces est nulle.

5.5.1 Mouvement rectiligne uniforme

On reprend le cas de notre chère fourmi M, se déplaçant maintenant selon l'équation horaire $x(t) = vt + x_0$. C'est un mouvement unidimensionnel. Par conséquent, on n'est pas obligé de le représenter avec des vecteurs.

Calculons la vitesse, en dérivant on trouve en tout instant t:v(t)=v. La vitesse est constante. C'est effectivement l'équation d'un mouvement rectiligne uniforme. L'accélération est obtenue en dérivant la vitesse, celle-ci étant constante, on trouve a(t)=0. Nous avons trouvé les propriétés du mouvement rectiligne uniforme.

Considérons maintenant une situation où on a deux voitures.

Exercise 5.1. Exercice: collision de deux voitures Une voiture A et une voiture B ont les équations horaires $x_A(t) = -3t + 2$ et $x_B(t) = 11t - 200$.

Est-ce que les deux voitures vont rentrer en collision? Si oui déterminer la position et le moment de la collision.

On peut évidemment généraliser cette situation en considérant un vecteur vitesse constant (avec des coordonnées qui sont constantes dans le temps).

5.5.2 Mouvement uniformément accélérée

Nous allons maintenant considèrer un mouvement avec une accélération constante.

Exercise 5.2. L'équation horaire est donnée par

$$z(t) = \frac{-g}{2}t^2. (6)$$

Montrer que l'accélération est constante.

5.5.3 Un premier mouvement arbitraire

Exercise 5.3. On considère le mouvement donné par

$$x(t) = 4t^5 - 20t^2 (7)$$

1. Trouver l'équation horaire de la vitesse et de l'accélération

5.5.4 Un deuxième mouvement arbitraire

Exercise 5.4. On considère le mouvement

$$x(t) = r\cos(\omega t) \tag{8}$$

$$y(t) = r\sin(\omega t) \tag{9}$$

- 1. Trouver l'équation horaire de la vitesse, montrer que le vecteur vitesse est orthogonal au vecteur position.
- 2. Trouver l'équation horaire de l'accélération.

En réalité, ce mouvement n'est pas arbitraire. Il s'agit d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse angulaire ω exprimée en radians par seconde.

On peut montrer directement que le mouvement est contenu dans un cercle de rayon r et de centre O, en notant que $x^2 + y^2 = r^2$ Pour un mouvement aussi simple, l'équation est plutôt compliquée. C'est dû à notre choix de coordonnées!

Parfois il est plus simple d'utiliser des angles pour indiquer des positions. C'est ce qu'on va montrer dans la prochaine partie.

5.6 Mouvement de rotation et coordonnées polaires

Note 5.1. introduction: système de coordonnées

Vous pouvez imaginer un système de coordonnées comme une carte^a de l'univers, un peu comme dans les jeux. Le système cartésien utilise directement les projections, l'autre système que nous allons considérer utilise des cercles concentriques en indiquant sur quel cercle l'objet se trouve et sa position dans ce cercle.

 a C'est aussi le terme mathématique utilisé dans la théorie mathématique sous-jacente, la géométrie différentielle.



(a) Carte type cartésien



(b) Carte type polaire

Au lieu d'utiliser des coordonnées cartesiennes, nous allons indiquer la position par la distance absolue r et l'angle θ par rapport à un axe. La particularité avec le système de coordonnées cylindriques, c'est que $\vec{e_r}$, et $\vec{e_\theta}$, les vecteurs unitaires associés au système de coordonnées (r,θ) sont des vecteurs tournants, et varient au cours du temps et nous avons :

$$\vec{e_r} = \cos(\theta)\vec{e_x} + \sin\theta\vec{e_y}$$

$$\vec{e_\theta} = -\sin(\theta)\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y}$$

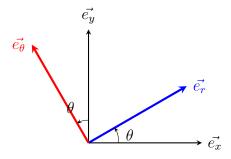


Figure 20: Figure plane du plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$

Exercise 5.5. Montrer que:

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_r}$$

Sachant $\frac{d\vec{e_x}}{dt} = \frac{d\vec{e_y}}{dt} = \frac{d\vec{e_z}}{dt} = 0$

Le lien entre les deux systèmes de coordonnées est le suivant:

Définition 5.3. Coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} \rightarrow \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$.

On définit $\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$ tel que

$$x(t) = r\cos(\theta),\tag{10}$$

$$y(t) = r\sin(\theta). \tag{11}$$

On trouve r et θ en inversant le système.

Exercise 5.6. 1. Montrer que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Montrer que $\tan(\theta) = \frac{y}{r}$

Dans ce système de coordonnées, le mouvement s'écrit

$$r(t) = r \tag{12}$$

$$\theta(t) = \omega t \tag{13}$$

Dans ce système de coordonnées, le mouvement est très simple!

5.7 Un mouvement particulier: le pendule simple

Non-exigible pour 5ème. On considère une masse m ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse et inextensible de longueur l. Le système oscille sous l'effet de la pesanteur. C'est un modèle simplifié du pendule réel. Nous allons voir en TP une version du pendule pesant réel.

Nous considérons ici uniquement la cinématique. Nous allons essayer d'écrire la formule de l'accélération en utilisant des coordonnées polaires.

$$x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \tag{14}$$

$$y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \tag{15}$$

On trouve que r(t) = l, le mouvement est à rayon fixe. On dit que la seule variable dynamique est θ .

On va écrire notre vitesse et accélération en fonction de θ .

Exercise 5.7. En dérivant x et y, montrer que

1. Le vecteur vitesse s'écrit
$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} -l\dot{\theta}\sin(\theta(t)) \\ l\dot{\theta}\cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

2. Le vecteur accélération s'écrit
$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \begin{pmatrix} -l\ddot{\theta}\sin(\theta(t)) - l\dot{\theta}^2\cos(\theta(t)) \\ l\ddot{\theta}\cos(\theta(t)) - l\dot{\theta}^2\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

Interlude: Newton n'a pas fait grand chose⁶

Jusqu'à présent, nous avons uniquement parlé de la description mathématique du mouvement. Nous n'avons a priori aucun lien avec le monde réel. On sait bien qu'un objet soumis à une force extérieure bouge. Donc, il y a un lien entre les **forces** exercées et le **changement de position** de l'objet en question.

Notre loi doit donc faire intervenir les forces et la variation de la position, donc des dérivées de la position $v=\frac{dx}{dt}$ et peut-être les dérivées supérieures.

En nous basant sur la discussion initiale sur la relativité du mouvement, on sait que la vitesse n'est pas une notion **objective** mais peut être complètement effacée en changeant de référentiel. On est donc amené à considérer l'accélération qui est bien réelle et qu'on peut sentir.

Notre loi doit également faire intervenir la masse de l'objet, on sait qu'il faut 2 fois plus d'effort pour produire le même mouvement pour un objet qui a deux fois la masse. L'analyse dimensionnelle nous permet d'écrire la loi heuristique:

$$F = ma$$

C'est bien la deuxième loi de Newton, et l'acronyme de notre summer camp.

Note 5.2. On a écarté les dérivées supérieures, on peut imaginer une loi avec la dérivée troisième de la position, connuee sous le nom mythique de jerk, ou même du snap et du crackle qui sont respectivement les dérivées quatrième et cinquième de la position. La question de se poser pourquoi est-ce qu'on les écarte est bien valide. Il existe une réponse purement mathématique à cette question, mais qui sort largement du cadre de ce cours. Globalement, on peut montrer mathématiquement qu'une telle loi souffrirait de problèmes mathématiques graves. Une telle loi prédirait des absurdités connues sous le nom de ghosts.^a

ac	. ^
"tan	${ m t\^{o}me}.$
TOIL	oomi.

 $^{^6\}mathrm{C'est}$ une blague...

6 Dynamique et les lois de Newton

6.1 La mécanique d'Aristote à Galilée et Newton

L'un des esprits les plus brillants à avoir considéré le problème du mouvement fut Aristote 7. On lui doit la décomposition de l'univers en matière et forces. Figure intellectuelle d'une autorité sans égale, sa théorie de la physique a dominé une grande partie du monde intellectuel jusqu'à Galilée. Pour lui, la cause de tout mouvement est la volonté et sa théorie était, selon nos standards modernes, purement fantaisiste. Selon sa théorie, un objet lancé horizontalement doit suivre une droite horizontale pendant un moment avant de tomber verticalement. La découverte de Galilée du mouvement parabolique des objets en chute libre fut un coup considérable pour les adeptes d'Aristote [3]. Le premier grand défi pour Galilée et Kepler était de combattre la théorie d'Aristote, ainsi que l'interprétation contemporaine de la Bible.

L'autre découverte importante de Galilée était d'énoncer le principe d'inertie, également connu sous le nom de la première loi de Newton. Selon cette loi, quand un objet est isolé et n'est soumis à aucune force extérieure dans un référentiel, l'objet n'est pas **forcément** au repos, il peut également suivre un mouvement rectiligne uniforme. Il introduit également la notion d'**inertie**: la tendance des corps à résister à tout changement de leur vitesse.

Quand un corps ponctuel est soumis à des forces extérieures, on observe clairement qu'il tend à suivre la direction des forces. Il nous faut une manière de déterminer exactement comment un corps **change** son vecteur vitesse. Il s'avère que la quantité adaptée à suivre n'est pas la vitesse, mais il faut également tenir compte de la masse. Comme on a mentionné précédemment, la masse ⁸ doit absolument être prise en compte. On introduit ainsi le concept de quantité de mouvement (momentum en anglais).

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

6.2 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est un concept que l'on connaît très bien intuitivement. Pour comprendre l'importance de la quantité de mouvement, je vous laisse contempler la collision d'un train de 10000 tonnes à 60km.h^{-1} et une voiture de 1 tonne à 60km.h^{-1} . On introduit ainsi le vecteur quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m\vec{v}.\tag{16}$$

On l'introduit pour distinguer les voitures des trains et les planètes des atomes. Face à des forces ou à des collisions, ce n'est pas la vitesse qui compte, mais la quantité de mouvement!

⁷Aristote, né en 384 et mort en 322 av. notre ère, l'un des philosophes les plus influents de l'histoire. Souvent appelé "Le Philosophe", il a inventé la logique formelle et il est souvent considéré comme le père fondateur de la biologie, la science politique, la zoologie, la psychologie, la méthode scientifique et également la rhétorique.

⁸La masse est interprété ici comme une mesure de l'inertie, la résistance au changement du mouvement.

6.3 La deuxième loi de Newton ou PFD

On énonce ainsi la deuxième loi de Newton, appelé aussi **PFD** (Principe Fondamental de la Dynamique) :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$
 (17)

Un cas particulier très important est le cas où la masse est fixe :

$$\sum \vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt},\tag{18}$$

où on a utilisé la constance de la masse pour l'extraire de la dérivée. On va considérer essentiellement ce cas particulier dans nos études, l'autre exemple est important quand on considère un objet dont la masse varie comme une fusée et permet d'expliquer la propulsion, c'est-à-dire comment une fusée puisse s'envoler alors qu'elle est soumise qu'à la gravitation.

Pour mieux assimiler l'importance capitale de cette loi, nous allons considérer quelques exemples.

6.4 Parabole de Galilée

6.4.1 Chute verticale sans frottement

On considère un objet K en chute libre selon l'axe y. On suppose que le corps est soumis uniquement à la force gravitationnelle. Ainsi, la seule force est le poids \vec{P} . On admet que

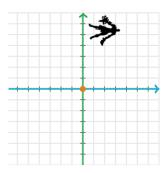


Figure 21: Chute libre vertical

le poids a pour expression $\vec{P} = m\vec{g}$ où \vec{g} est le vecteur de l'intensité de pesanteur, orienté en bas selon la verticale. On reviendra là-dessus quand on traitera la gravitation.

La deuxième loi de Newton s'écrit

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$
.

En simplifiant par m, on retrouve :

$$\vec{a} = \vec{g}$$
.

. C'est le fameux résultat dû à Galilée que tous les corps accélérent de la même manière peu importe leur masse.

Le mouvement est unidimensionnel, en projetant selon l'axe du mouvement, on trouve une **équation différentielle**

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Heureusement g est une constante du temps, ce qui permet de faciliter le traitement de cette équation. En intégrant, c'est à dire en calculant la primitive de la constante g, on trouve

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0.$$

Où y_0 est une constante d'intégration, c'est la vitesse à l'instant t=0. En intégrant une deuxième fois pour trouver l'équation horaire

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + C$$

. Les conditions initiales déterminent les constantes d'intégration et imposent le mouvement. Vous pouvez l'interpréter de cette manière, les forces **changent** la trajectoire, mais il faut également préciser l'état initial pour pouvoir prédire le mouvement.

Exercise 6.1. En supposant que notre objet part de la position $y = 830m^a$ avec une vitesse initiale nulle. Déterminer le temps de chute de notre objet

 $^a\mathrm{La}$ hauteur du Burj Khalifa

6.4.2 Mouvement ballistique

Maintenant, on va traiter un mouvement à deux dimensions de l'espace. Le mouvement d'un ballon de foot⁹

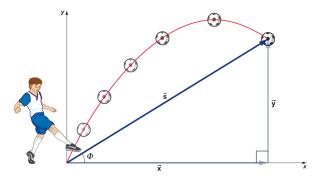


Figure 22: Mouvement d'un ballon de foot.

Le ballon est lancé à l'instant $t_0 = -1s^{10}$ avec un angle θ , on veut déterminer la trajectoire du ballon, c'est à dire les équations horaires y(t) et x(t) pour $t \ge -1$. On applique la deuxième loi de Newton, on retrouve la même équation différentielle :

$$\vec{a} = \vec{q}$$
.

En projetant, on touve:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

⁹On ne va pas traiter la rotation interne du ballon et de l'effet dit Magnus, effet essentiel dans le foot mais qui nécessite un peu plus de recul. On peut laisser ce sujet à une discussion nocturne.

 $^{^{10}}$ Pour rendre la vie plus compliquée et pour comprendre que le choix $t_0 = 0$ est arbitraire pour rendre les équations plus simples.

Maintenant, le mouvement selon Ox est également non-trivial. On trouve en intégrant

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_y$$
$$\frac{dx}{dt} = c_x$$

En considérant les conditions initiales $t_0 = -1$, en projetant on trouve $v_{x,\text{initiale}} = v_0 \cos(\theta)$ et $v_{y,\text{initiale}} = v_0 \sin(\theta)$.

La condition initiale *correcte* est ainsi:

$$\frac{dy}{dt}(-1s) = v_0 \sin(\theta)$$
$$\frac{dx}{dt}(-1s) = v_0 \cos(\theta).$$

On trouve

$$c_x = v_0 \cos(\theta)$$
$$c_y = v_0 \sin(\theta) + gt_0$$

On trouve in fine¹¹

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + c_y t$$
$$x(t) = c_x t$$

Physiquement, le mouvement se décompose en

- \blacksquare Un mouvement rectiligne uniforme dans l'axe Ox
- Un mouvement uniformément accéléré dans l'axe Oy

6.4.3 L'équation de la trajectoire

Trouver l'équation de la trajectoire revient à trouver l'équation y(x), c'est-à-dire l'ordonnée en fonction de l'abscisse en éliminant la dépendance temporelle.

Exercise 6.2. Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit

$$y(x) = \alpha x^2 + \beta x$$

Pour simplifier, on suppose que l'équation horaire est maintenant

$$y(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0 \sin(\theta)t$$
$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t$$

- 1. Trouver α et β
- 2. Justifier l'appellation mouvement parabolique et esquisser la trajectoire

¹¹On suppose que les constantes d'intégration de la position sont nulles.

Note 6.1. Notez bien qu'on a négligé la résistance de l'air, ce qui revient à donner un résultat très beau. La réalité est un peu plus compliquée.

6.5 Frottements

Maintenant, on va prendre en compte la résistance de l'air. La question qui se pose est comment est-ce que la résistance de l'air agit comme force. Ce n'est pas une question simple a priori. On comprend que la résistance de l'air dépend de la surface de l'objet considéré. Il suffit de comparer la chute d'une feuille avec la chute d'une feuille pliée. Qui plus est, la résistance dépend également de la vitesse de l'objet considéré, pour le

On est amené au modèle suivant:

comprendre je vous invite à faire du vélo.

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} \tag{19}$$

Exercise 6.3. **Expliquer** pourquoi le signe?

 \blacksquare C'est quoi la dimension de α

Maintenant le PFD s'écrit

$$\vec{f} + \vec{P} = m\vec{a}. \tag{20}$$

En projetant sur les axes x et y, on trouve

$$\begin{pmatrix}
\frac{dv_x}{dt} \\
\frac{dv_y}{dt}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
-\frac{\alpha}{m}v_x \\
-\frac{\alpha}{m}v_y - g
\end{pmatrix}.$$
(21)

On sait d'après les cours de mathématique, que la solution de l'équation différentielle f'(t) = af(t) est la fonction

$$f(t) = Ae^{at}$$

où A est une constante, désormais nous avons :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v_x\\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v_y - g \end{cases}$$

Vous pouvez vous convaincre que les solutions à ces équations différentielles sont les suivantes :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x}e^{-\frac{\alpha}{m}t} \\ v_y(t) = v_{0y}e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{gm}{\alpha} \end{cases}$$

6.6 Propulsion

6.6.1 Application naïve de la deuxième loi de Newton

On considère une fusée soumise à la gravitation (et la résistance de l'air).



Figure 23: Starship, une fusée emblématique

En appliquant le PFD naïvement à la fusée, on trouve la même équation différentielle que la dernière section, donc à la limite $t\to +\infty$, on a $\lim_{t\to +\infty} e^{-\frac{\alpha}{m}t}=0$. Ce qui indique que la fusée doit finir par tomber...

Ce n'est pas ce qu'on voit - en tout cas pour les fusées qui marchent, pas Starship - comment expliquer ce problème? La deuxième loi de Newton est-elle fausse?

6.6.2 Application correcte de la deuxième loi de Newton

En effet, pour le cas de la fusée, la masse n'est pas constante, il faut appliquer la version originale de la deuxième loi de Newton, en incluant la dérivée de la masse par rapport au temps. On considère maintenant le système: {Fusée uniquement}. La masse n'est plus constante. On suppose que la masse varie de manière linéaire

$$m(t) = m_0 - Dt (22)$$

Exercise 6.4. 1. C'est quoi la dimension de D?

2. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle s'écrit $\frac{dv}{dt}=\frac{Dv}{m_0-Dt}-g$

La résolution de cette équation différentielle fait appel à des techniques que nous avons pas vu. On va traiter un cas particulier, la propulsion dans le vide, pour simplifier g=0. Ainsi, l'équation s'écrit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Dv}{m_0 - Dt}. (23)$$

On va maintenant intégrer cette équation différentielle.

Note 6.2. La technique qu'on va utiliser maintenant s'appelle séparation des variables, on va séparer la variable v et t, et procéder ensuite par calcul de primitives.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Dv}{m_0 - Dt} \implies \frac{dv}{v} = \frac{Ddt}{m_0 - Dt}$$

$$\implies \ln(v) = -\ln(|m_0 - Dt|) + C^{te} = \ln\left(\frac{1}{|m_0 - Dt|}\right) + C^{te}$$

Ainsi, par identification, et comme la fonction logarithme est bijective donc il existe une constante A tel que $\ln(A) = C^{te}$, soit

$$\ln(v) = \ln\left(\frac{A}{m_0 - Dt}\right)$$

Ainsi, on trouve

$$v(t) = \frac{a}{m_0 - Dt}$$

6.7 Troisième loi de Newton

Nous avons présenté certains cas où on arrive à résoudre plus ou moins exactement les équations différentielles qui résultent de l'application de la deuxième loi de Newton. C'est pour cette raison que les gens peuvent conclure qu'on peut toujours résoudre ces équations. Cette conclusion est **fausse**! C'est même l'inverse, nous avons présenté ces situations **car** on arrive à résoudre l'équation. On¹² ne peut même pas résoudre l'équation qui résulte en prenant 3 particules massives en interaction gravitationelle uniquement, ce qui donne naissance au fameux problème à trois corps¹³. Ainsi, il est important d'avoir le plus de principes possibles. Un volet extrêmement utile de principes que nous allons élaborer par la suite consiste en l'étude de **l'énergie**. Toutes ces considérations sont des conséquences mathématiques de la deuxième loi de Newton. Il reste un principe indépendant de cette loi connu sous le nom de la troisième loi de Newton

"L'action est toujours égale et opposée à la réaction ; c'est-à-dire, que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et dans des directions contraires." [4]

6.8 La cosmogonie de Newton

Considérons maintenant la vue d'ensemble. Supposons que l'on connaît toutes les lois de toutes les forces appliquées à tous les corps. Par l'application de la deuxième loi de Newton, et la résolution des équations résultantes, on peut, en théorie, connaître **l'évolution** future ainsi que le **passé** de tous les corps. Ceci indique que l'évolution de l'univers est absolument déterministe. Seuls restent les conditions initiales! Cette observation est dû à Laplace qui indiquait:

"Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux." Pierre-Simon Laplace.

¹²l'humanité toute entière.

¹³Pas la série..

7 Point de vue énergétique de la mécanique

Cette partie introduit le point de vue énergétique en mécanique. Nous y présenterons la notion d'intégrale première du mouvement, permettant de relier deux états distincts du système (position et énergie) sans faire intervenir explicitement la variable temporelle. Cette approche présente l'avantage de s'appuyer sur des grandeurs scalaires, évitant ainsi le recours aux dérivées. Nous y proposerons également des interprétations physiques intuitives de ces intégrales premières, et formulerons les différentes lois de conservation qui y sont associées, lesquelles constituent autant de manifestations d'un même principe fondamental.

En somme, il s'agit de dévoiler les causes profondes du mouvement, dans la même optique des parties précédentes, et dans l'esprit de la maxime : « Heureux celui qui a pu des choses connaître les causes ! » 14

Introduction

Nous avons vu précédemment la démarche standard pour déterminer la trajectoire d'une masse en mouvement : Choisir un référentiel convenable, Choisir un système de coordonnées, Faire un bilan des forces, utiliser la deuxième loi de Newton et résoudre les équations différentielles. Cependant, on peut soulever un inconvénient de cette démarche : elle se base sur des équations vectorielles, et du coup il faudra bien choisir les sens et directions des forces! Ainsi, pour remédier à cela, nous allons construire des grandeurs physiques, scalaires intuitives dans le but de trouver des grandeurs dépendantes des forces et de l'état du système (position et vitesse), et qui soient **constantes** lors du mouvement ; c'est ce qu'on appelle des **intégrales premières du mouvement**.

7.1 Travail d'une force

Prenons l'exemple d'un cheval carrossier tirant une voiture sur un sol horizontal, en supposant que les forces de frottement sont négligeables. L'action du poids, bien que présente, n'intervient pas dans le mouvement horizontal du système. En effet, la composante de la force gravitationnelle selon la direction du déplacement, que l'on repère par un axe \vec{e}_x , est nulle. Ce constat suggère une première manière d'évaluer l'influence d'une force sur une trajectoire : considérer sa projection sur la direction du mouvement. Cette approche, bien qu'intuitive, se révèle rapidement insuffisante dès lors que la force varie au cours du déplacement. Pour affiner notre description, nous adoptons une stratégie récurrente en physique : nous ramenons le problème à l'échelle infinitésimale, où les grandeurs peuvent être considérées comme localement constantes, et nous intégrons ensuite cette information le long de la trajectoire pour obtenir une description globale.

 $^{^{14}}Les\ G\'{e}orgiques,$ Virgile

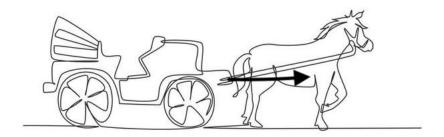


Figure 24: Cheval carrossier

Ainsi, sur un déplacement élémentaire $d\vec{l}$, on peut supposer que la force $\vec{f} = \overrightarrow{cte}$. Donc, d'après ce qui était dit avant, la quantité "l'influence d'une force" vaut localement la composante de cette force selon $d\vec{l}$, i.e $\vec{f} \cdot d\vec{l}$.

On va désormais nommer "l'influence d'une force" son travail, noté W pour work. On peut conclure alors que pour une quantité élémentaire du travail, δW , on a :

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

Et donc par le raisonnement qu'on a fait, le travail de la force \vec{f} entre les points A et B est :

$$\vec{W}_{A\to B}(\vec{f}) = \int_A^B \delta W$$
$$= \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

Des remarques naturelles découlent de cette définition du travail :

- On remarque que le travail est une grandeur additive par rapport à la trajectoire, i.e $\vec{W}_{A\to B}(\vec{f}) = \vec{W}_{A\to C}(\vec{f}) + \vec{W}_{C\to B}(\vec{f})$, ce qui est en conformité avec l'intuition qu'on a sur l'influence : lors d'une escalade de 20m, l'influence du poids sera deux fois que dans le cas de 10m (on rappelle que le poids est indépendant de l'altitude sur les échelles terrestres).
- Ce dernier point nous donne une nouvelle interprétation de la notion du travail. En effet, on peut voir que pour grimper 20m, on a une barrière qui nous empêche de faire ce mouvement, qui serait le travail du poids. Par conséquent, pour rendre le mouvement possible, il faut fournir un effort qui dépasse cette barrière, une **énergie** plus grande. Le travail est donc la barrière énergétique à franchir pour que le mouvement ait lieu.

• Un dernier point, peut-être un peu poussé mais tout aussi intéressant, serait de revoir le raisonnement qu'on a suivi pour définir le travail. En effet, après un raisonnement qualitatif, nous avons réussi à trouver une expression satisfaisante dans un cas particulier (où la force est constante), puis on a cherché un moyen de généralisation. Une autre reformulation serait qu'on a divisé notre problème initial (trouver une définition rigoureuse de "l'influence d'une force"), à des sous problèmes plus abordables (trouver une définition rigoureuse de "l'influence d'une force" dans le cas où la force est constante, et comment passer de l'infinitésimal au général), pour combiner les solutions des différents sous problèmes pour répondre à la problématique initiale. Cette technique se nomme "diviser pour régner", on peut voir ce cours comme application de cette technique pour répondre à la problématique suivante : trouver une nouvelle approche de la mécanique en utilisant que des scalaires.

Exercise 7.1. Revenons à l'exemple du cheval carrossier et supposons qu'il tire la carrosserie à une force constante de 100N sur une distance de 50m. Quel est le travail fournit par le cheval pour effectuer ce tirage?

7.2 Énergies

7.2.1 Énergie cinétique

Nous disposons désormais d'une nouvelle grandeur scalaire, le travail d'une force, qui serait pertinente pour décrire l'interaction du système avec les forces qui l'entourent. Partons de la deuxième loi de Newton et essayons d'établir une nouvelle équation qui met en jeu cette quantité :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$$

$$m \ d\vec{l} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$m \ \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot d\vec{v} = \sum \delta \vec{W}(\vec{F})$$

$$m \ \vec{v} \cdot d\vec{v} = \sum \delta \vec{W}(\vec{F})$$

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \sum \delta \vec{W}(\vec{F})$$

La quantité $\frac{1}{2}mv^2$ représente l'énergie cinétique, que l'on notera E_c . On voit clairement qu'elle est homogène à une énergie qu'on interprétera à la fin de cette section. En intégrant la dernière équation entre deux positions A et B, on trouve la première forme du théorème d'énergie cinétique dite intégrale :

$$\Delta_{A\to B}E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum \vec{W}_{A\to B}(\vec{F})$$

Non exigible pour 5ème

Pour trouver la forme dite différentielle, bien plus puissante que la première, on divise par

dt les deux côtés. On trouve :

$$\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} = \sum \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Nommons la quantité $\vec{F} \cdot \vec{v}$ la puissance de la force \vec{F} , et notons-la $\mathcal{P}(\vec{F})$. Il s'agit bien d'une puissance (énergie par temps comme vu en électricité) et elle représente le débit d'énergie par unité de temps. Finalement, le théorème d'énergie cinétique s'écrit dans sa forme différentielle :

 $\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})$

Un mathématicien s'arrêtera ici, mais pour nous, physiciens, confrères de Feynman, l'aventure ne fait que commencer. Commençons par l'énergie cinétique. Imaginons qu'une voiture de masse 500kg fonce à une vitesse de $100km.h^{-1}$ sur un piéton et un bus de masse 5000kg fonce à la même vitesse sur un autre piéton. L'intuition nous dit que le second piéton sera éjecté plus loin que le premier. On peut déjà expliquer cela physiquement juste avec le bagage qu'on a construit jusqu'ici : dans le deuxième cas, l'énergie cinétique du véhicule est plus grande, et donc l'énergie transférée au piéton sera plus grande. De même, si la masse était la même pour les deux véhicules mais leurs vitesses étaient différentes, le véhicule avec la plus grande vitesse transmettra une énergie plus grande au piéton qui sera donc éjecté plus loin. À partir de cette expérience de pensée, on peut justifier que l'énergie cinétique croit quand la masse ou la vitesse augmentent. On peut donc conclure que l'énergie cinétique est l'énergie qui reflète le mouvement du système dans un référentiel (et donc dépend de ce dernier). On verra plus loin d'autres types d'énergie.

Pour la puissance, on peut l'interpréter comme le débit de l'énergie ou bien "la vitesse d'écoulement d'énergie". On peut en effet généraliser cela, pour une quantité X, on peut définir son débit par $\frac{dX}{dt}$, comme à titre d'exemple le débit volumique d'un robinet qui n'est que le volume d'eau qui s'écoule par seconde à travers un tuyau.

7.2.2 Force conservative et énergie potentielle

Considérons pour commencer le cas simple du poids. $\vec{P}=m\vec{g}=\overrightarrow{cte},$ et considérons deux points A et B :

$$\vec{W}_{A \to B}(\vec{P}) = \int_{A}^{B} \vec{P} \cdot d\vec{l}$$
$$= \vec{P} \cdot \int_{A}^{B} d\vec{l}$$
$$= \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}$$

On voit que le travail du poids, et donc son "influence" ne dépend que de la position initiale et finale du mouvement, et non du chemin considéré entre ces positions : un corps soumis uniquement à son poids fournirait le même travail pour aller d'un point A à un point B qu'il aille en ligne droite ou en trajectoire parabolique par exemple. On dit que le poids est une **force conservative**. L'origine du terme "conservative" sera justifiée plus tard.

Note 7.1. Globalement, les forces de frottements sont considérées non conservatives.

Définition 7.1 (Force conservative). Une force \vec{f} est dite conservative lorsque le travail qu'elle fournit entre deux points A et B ne dépend que des positions de ces points, et non du chemin emprunté.

Nous avons vu précédemment que le poids constitue un exemple typique de force conservative. À l'inverse, les forces de frottement ne satisfont pas cette propriété : plus le trajet suivi entre A et B est long, plus le travail requis pour effectuer la transition est important. Dans le cas des forces conservatives, il est alors possible d'associer à chaque point de l'espace une énergie potentielle, définie — à une constante additive près — comme l'opposé du travail effectué par la force pour atteindre ce point depuis une position de référence. Ce caractère arbitraire de la constante additive est une caractéristique générale des grandeurs énergétiques : une énergie absolue n'a pas de signification physique intrinsèque, seules les différences d'énergie entre deux états sont physiquement pertinentes, ce qui justifie que les constantes additives se simplifient naturellement dans les calculs.

Comme on avait vu que l'énergie cinétique reflète le mouvement du corps dans un référentiel, l'énergie potentielle reflète l'interaction du corps avec les forces qu'il subit.

Avec cette définition, calculons le travail d'une force conservative \vec{f} entre A et B qui dérive d'une énergie potentielle qu'on notera E_n .

$$\vec{W}_{A\to B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l}$$
$$= -(E_p(B) - E_p(A))$$

On voit que le travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions de départ et d'arrivée. En plus, on voit que le travail ne dépend pas de la constante de définition de E_p , c'est bien ce qui était dit précédemment ; les constantes additives se simplifient dans la différence ci-dessus.

7.2.3 Le théorème d'énergie cinétique T.E.C pour le cas conservatif

Le calcul précédent nous donne une nouvelle propriété : pour une force conservative, son travail n'est que l'opposé de la variation de son énergie potentielle.

Théorème 7.1 (T.E.C). Le théorème d'énergie cinétique s'écrit alors dans le cas où toutes les forces sont conservatives :

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = 0$$

Le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C) est équivalent à :

$$E_c + E_p = cte$$

Cette constante de mouvement à la dimension d'une énergie. On l'appellera l'énergie mécanique. Ainsi, on a réussi à construire une *intégrale première du mouvement*, permettant ainsi de résoudre des problèmes de mécanique sans introduire une variable temporelle.

Remarque On peut se demander pourquoi on le nomme théorème, terme utilisé en général en maths. En effet, si l'on admet le **PFD**, le **T.E.C** devient une **vérité mathématique** de notre univers, que l'on **peut démontrer mathématiquement** avec toute la rigueur que cela implique.

7.3 Énergie mécanique et T.E.M

Si l'on contemple un petit peu, on peut se convaincre que l'énergie d'un corps est contenue dans son mouvement ou dans son interaction. Cela tombe bien, on peut interpréter le terme de l'énergie du mouvement comme l'énergie cinétique, et celui de l'interaction comme celui de l'énergie potentielle. On définit alors l'énergie mécanique comme la somme des deux formes d'énergies évoquées jusqu'ici :

$$E_m = E_c + E_p$$

Si l'on a envie de dire que l'énergie mécanique est l'énergie totale d'un corps, cela est faux ! On a négligé en effet les échanges thermiques ainsi que les pertes d'énergies liées aux forces non conservatives comme les frottements. Pour les frottements, le théorème d'énergie cinétique et le théorème d'énergie mécanique, comme le lecteur le découvrira dans quelques lignes, prennent bien en compte des frottements . Pour les échanges thermiques, cela sera bien discuté lors du cours de thermodynamique.

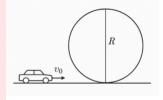
Théorème 7.2 (Théorème d'énergie mécanique). Le théorème de l'énergie mécanique s 'énonce comme suit :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum P(\vec{F}^{nc}) \quad (par \ \vec{F}^{nc} \ on \ indique \ les \ forces \ non \ conservatives).$$

Ainsi, dans le cas où toutes les forces sont conservatives, on retrouve le résultat de 7.1: l'énergie mécanique est une constante du mouvement ; c'est une *intégrale première du mouvement*.

Exercise 7.2. 1. En s'appuyant sur les équations horaires de la chute libre présentées précédemment, établir que l'énergie mécanique se conserve tout au long de la chute de la masse.

2. Trouver la vitesse minimale v₀ pour que la voiture puisse franchir un looping vertical (le "cercle géant") de rayon R.



7.4 Mécanique des chocs

Dans cette section, nous étudions les interactions dynamiques entre deux corps en mouvement, en nous concentrant sur les instants précédants et suivant leur contact. Lorsque deux systèmes matériels M_1 et M_2 entrent en collision (par exemple, une bille heurtant une paroi), les phénomènes internes à l'interaction peuvent être extrêmement complexes et dépendent de nombreux paramètres microscopiques. Plutôt que de modéliser en détail la phase de contact, nous adoptons une approche globale consistant à comparer les états mécaniques des corps avant et après la collision, en supposant que les forces mutuelles sont négligeables en dehors de l'instant du choc. Cette méthode repose sur la recherche de grandeurs conservées, à l'image de ce que nous avons fait dans l'étude des intégrales premières du mouvement.

7.4.1 Motivation

Imaginons que Mehdi et Anas s'adonnent à une partie de billes devant leur maison. Mehdi utilise des billes métalliques, sensiblement plus lourdes que les billes standards en verre choisies par Anas. Après trois défaites consécutives, ce dernier conteste l'équité du jeu, arguant que les victoires de Mehdi sont dues à la masse plus importante de ses billes, qui rend les chocs bien plus efficaces. Mehdi rétorque qu'il suffirait à Anas de lancer ses propres billes avec davantage de force pour compenser. Cette divergence amène une question légitime : qui a raison, et que dit la physique des chocs entre billes ?

Nous essayerons de décrire dans cette section la physique derrière ces chocs entre ces billes. En toute généralité, notons M_1 et M_2 respectivement les centres de gravité des deux masses, \vec{v}_1 et \vec{v}_2 (resp. \vec{v}_1' et \vec{v}_2') les vitesses des centres d'inertie de M_1 et M_2 pendant la phase « avant » (resp. « après »). Plus généralement, toutes les quantités relatives à la phase « après » porteront un prime.

Essayons donc d'appliquer l'approche qu'on a apprise jusqu'à présent : on se place dans un référentiel galiléen, le système étudié est $\{M_1 + M_2\}$, on suppose qu'on n'a pas d'interactions extérieures. Ainsi, en appliquant la deuxième loi de Newton à l'ensemble des deux masses, la quantité de mouvement totale est alors conservée, comme il n'y a pas de forces extérieures. (On rappelle que la quantité de mouvement est additive). Qu'en est-il de l'énergie cinétique ?

7.4.2 Choc élastique

Définition 7.2. Un choc est dit **élastique** si ce choc conserve l'énergie cinétique totale du système.

On se place dans le cadre des chocs élastiques. La physique du cas non échéant étant complexe et se basant sur des heuristiques et de l'expérimentation.

Ainsi, on a deux équations :

$$\begin{split} M_1\vec{v}_1+M_2\vec{v}_2&=M_1\vec{v}_1'+M_2\vec{v}_2' \quad \text{(Conservation de la quantité de mouvement)} \\ \frac{1}{2}M_1v_1^2+\frac{1}{2}M_2v_2^2&=\frac{1}{2}M_1v_1'^2+\frac{1}{2}M_2v_2'^2 \quad \text{(Conservation de l'énergie cinétique)} \end{split}$$

Ce cas où l'énergie cinétique se conserve est nommé choc élastique en référence à la notion physique d'élasticité : c'est un système qui, même après une perturbation, conserve une

grandeur, qui est dans ce cas l'énergie cinétique globale. Considérons le cas particulier et simple de choc de deux billes de même masse M.

Si l'on se met dans le référentiel de la deuxième particule (qui est aussi galiléen, puisqu'il est en translation rectiligne uniforme selon \vec{v}_2), on peut supposer que $\vec{v}_2 = \vec{0}$. Un bon physicien saura toujours comment simplifier une situation en proposant les bonnes hypothèses simplificatrices. On peut alors simplifier les équations qu'on a, on obtient :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$
$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

On en déduit en élevant au carré la première équation que $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$. Nous avons trois cas possibles :

- 1. $\vec{v}_2' = \vec{0}$, dans ce cas, on n'a pas d'interaction.
- 2. $\vec{v}_1' = \vec{0}$, et donc $\vec{v}_2' = \vec{v}_1$, la cible emporte toute la quantité de mouvement.
- 3. $\vec{v}_1' \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2' \neq \vec{0}$, après le choc, les trajectoires des deux points matériels font un angle droit (expliquer pourquoi ce n'est pas le cas dans une table de billard).

Exercise 7.3. Justifier pourquoi Anas pourrait avoir raison : lorsque la masse d'une bille est trop grande comparée à l'autre, une augmentation raisonnable de la vitesse de propulsion de la bille légère ne permettra pas de déplacer efficacement la bille lourde.

Exercise 7.4. On lance une balle de tennis de masse 100g d'une hauteur de 1m. Après le premier rebond, la hauteur atteinte est 0.75m. Calculer le nombre de rebonds que va faire la balle de tennis.

8 Thermodynamique 2: Loi des gaz parfaits

Dérivation de la loi des gaz parfaits

Imaginons un gaz confiné dans une enceinte cubique de volume V. Nous cherchons à établir une relation entre la pression du gaz, sa température, le nombre de particules et son volume.

Avant tout, il est essentiel de préciser ce que l'on entend par "température". Une manière pertinente de la définir est de la considérer comme une mesure de l'agitation des molécules du gaz. Cette agitation peut être reliée à l'énergie cinétique moyenne des particules du système.

On pourrait alors se demander pourquoi ne pas simplement définir la température à partir de la vitesse moyenne des particules. La réponse est que, dans un gaz où les particules se déplacent dans toutes les directions de manière aléatoire, la vitesse moyenne (au sens vectoriel) est nulle. Cette définition ne permettrait donc pas de rendre compte de l'agitation des particules. C'est pourquoi on se tourne plutôt vers l'énergie cinétique moyenne, qui reste toujours positive, pour relier température et mouvement microscopique. 15

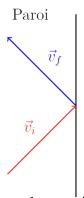
On modélise les molécules d'un gaz parfait par N sphères de taille et de masse égales. Tous les chocs sont considérés élastiques (l'énergie cinétique est conservée, voir définition dans le cours Mécanique 3). L'énergie mécanique est ainsi conservée. Leurs vitesses sont les mêmes dans toutes les directions, i.e. $v_x = v_y = v_z^{16}$. Le but est de trouver une expression de la pression qu'exercent ces particules sur la paroi de notre enceinte.

Tout d'abord, considérons le cas d'une particule de masse m, de vitesse $\vec{v}_{\text{initiale}} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y} + v_z \vec{e_z}$ qui entre en collision avec la paroi qui est parallèle au plan YZ.

La vitesse suite à la collision est $\vec{v}_{\text{finale}} = -v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y} + v_z \vec{e_z}$. La quantité de mouvement qui est transférée à la paroi est égale à:

$$\Delta P_{\text{particule}} = P_{\text{f}} - P_{\text{i}} = -2mv_x$$
 (24)

Une remarque importante serait de dire que les particules qui entrent en collision avec notre paroi n'ont pas toutes les mêmes vitesses. On va donc considérer le cas où les particules ont des vitesses bien connues: $\vec{v_1}, \vec{v_2} \cdots \vec{v_n}$, où $\vec{v_i} = v_{x_i} \vec{e_y} + v_{y_i} \vec{e_y} + v_{z_i} \vec{e_z}$



Durant une durée Δt , seules les particules étant à une distance $d_i = v_{x_i} \Delta t$ entreront en collision avec la paroi. On notera le nombre de ces particules N_i se trouvant à la bonne distance, et $n_i = \frac{N_i}{V}$. n_i représente le nombre de particules par unité de volume, cette quantité est considérée constante partout dans l'enceinte. Chaque particule transmettra une quantité de mouvement $\Delta \vec{P}_i = -2mv_{x_i}\vec{e}_x$. La force exercée par toutes les particules à vitesse v_{x_i} pendant Δt est:

$$\vec{F}_i = \frac{\Delta \vec{P}_i \cdot N_i}{\Delta t} = \frac{-2mv_{x_i}n_iv_{x_i}\Delta tA}{\Delta t}\vec{e}_x = -2mn_iv_{x_i}^2A\vec{e}_x$$
 (25)

¹⁵un gaz ayant une répartition uniforme des vitesses et des positions des particules est appelé un gaz isotrope.

 $^{^{16}}$ i.e. est l'acronyme de id est qui est une expression latine qui signifie: c'est-à-dire, ou en d'autres termes

où on a remplacé N_i par n_iV A est l'aire de la paroi. La pression étant la force divisée par une surface, on retrouve l'expression de la pression créée par les particules de vitesse v_{x_i} .

$$p_i = \frac{F_i}{A} = 2mn_i v_{x_i}^2 \tag{26}$$

On retrouve l'expression de la pression totale en sommant toutes les pressions:

$$p_{\text{totale}} = \sum_{v_{x_i} \ge 0} 2m n_i v_{x_i}^2 \tag{27}$$

Note 8.1. Nous avons vu dans le PFD $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, où les forces extérieures induisent un changement de quantité de mouvement, ici c'est la différence de la quantité de mouvement due au choc qui induit une force de pression.

Il faut faire attention au fait qu'on ne somme exclusivement que sur les particules qui ont une vitesse positive, et qui vont en direction de la paroi et non pas dans la direction opposée. On peut par ailleurs écrire:

$$\sum_{i} v_{x_i}^2 = \sum_{v_{x_i} \ge 0} v_{x_i}^2 + \sum_{v_{x_i} \le 0} v_{x_i}^2 = 2 \sum_{v_{x_i} \ge 0} v_{x_i}^2$$
(28)

Il faut faire attention aux indices de sommation dans la dernière équation. On somme sur toutes les vitesses dans le coté gauche de l'équation et on le sépare ensuite en deux sommes, la première pour les vitesses positives et la seconde pour les vitesses négatives. Comme les vitesses sont réparties uniformément, l'égalité suivante a été utilisée $\sum_{v_{x_i} \geq 0} v_{x_i}^2 = \sum_{v_{x_i} \leq 0} v_{x_i}^2.$

On peut exprimer maintenant la pression en fonction de la moyenne des vitesses au carré.

$$p_{\text{totale}} = \sum_{v_{x_i} \ge 0} 2mn_i v_{x_i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i} 2mn_i v_{x_i}^2 = \frac{m}{V} \cdot N_p \cdot \frac{1}{N_p} \sum_{i} N_i v_{x_i}^2$$
 (29)

où on a remplacé n_i par son expression $n_i = \frac{N_i}{V}$ dans la dernière égalité, et où N_p est le nombre de particules. On souhaiterait identifier l'expression de l'énergie cinétique moyenne $K_{\text{moy}} = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2)$. Malheureusement on n'a que v_{x_i} dans l'expression que nous avons obtenue. Comment résoudre ça?

On utilise encore une fois le fait que la vitesse est distribuée de manière uniforme (isotropie du gaz), et on écrit:

$$\frac{1}{N_p} \sum_{i} v_{x_i}^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i} v_{y_i}^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i} v_{z_i}^2 \implies \frac{1}{N_p} \sum_{i} v_{x_i}^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{N_p} \sum_{i} v_i^2 \tag{30}$$

On peut maintenant ressortir l'énergie cinétique moyenne dans l'expression de la pression totale:

$$p_{\text{totale}} = \frac{m}{V} \cdot N_p \cdot \frac{1}{N_p} \sum_{i} N_i v_{x_i}^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{N_p}{V} \sum_{i} \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{N_p}{V} K_{\text{moy}}$$
(31)

On convertit le nombre de particules en moles par la relation $N_p = N \cdot N_A$ et on réécrit la relation:

$$pV = p_{\text{totale}}V = \frac{2}{3}N \cdot N_A K_{\text{moy}}$$
 (32)

Il est temps maintenant d'énoncer le postulat de Boltzmann:

"Chaque degré de liberté du système stocke la même quantité d'énergie. L'énergie par particule et par degré de liberté étant $\frac{1}{2}k_BT$ ".

On entend par "degré de liberté" une variable indépendante par laquelle une particule peut emmagasiner de l'énergie sous forme quadratique (par exemple, une énergie cinétique de la forme $\frac{1}{2}mv^2$ ou une énergie potentielle de la forme $\frac{1}{2}kx^2$ où k est un nombre réel positif).

Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, chaque particule est libre de se déplacer dans les trois directions de l'espace (x, y et z), ce qui correspond à 3 degrés de liberté liés à la translation. Ces trois mouvements indépendants peuvent chacun stocker de l'énergie cinétique.

En appliquant le postulat de Boltzmann à ces trois degrés de liberté, on obtient :

$$pV = \frac{2}{3}N \cdot N_A \cdot K_{\text{moy}} = \frac{2}{3}N \cdot N_A \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}k_B T = NN_A k_B T$$
 (33)

Sachant que $N_A k_B$ est égal à la constante des gaz parfaits R, on conclut :

$$pV = NRT (34)$$

9 Gravitation

Introduction

Vous avez souvent travaillé avec le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dans plusieurs problèmes et/ou situations sans vous attarder sur l'origine d'une telle force. Puis, au lycée, vous avez découvert qu'il s'agit, en effet, d'une force de gravitation, dont l'origine est la seule présence, ou l'existence de corps ayant une **masse**, l'effet n'étant encore manifesté que sur des corps ayant une masse. On peut se demander ici s'il existerait des corps sans masse, ce qui est un questionnement tout à fait légitime (Oui, par exemple la lumière (les photons) sont de masse nulle). Mais ici, on peut se permettre de réfléchir encore plus loin : Si la masse, au début, représentait dans notre conscience à quel point un objet est "lourd", ceci ne peut plus être rigoureusement correct. Le "lourd" dépend de la force de gravitation mise en jeu. **Qu'est ce que donc réellement la masse?** Que veut-on dire par un corps massif? Bref, nous nous intéressons d'abord dans ce cours aux interactions et aux forces régies par la présence de masses, et leur effet dans l'univers (ou plutôt dans le système solaire de prime abord).

De telles forces gravitationnelles semblent à première vue négligeables devant les autres forces usuelles, lorsqu'il s'agit de masses de l'ordre du kilogramme kg. Mais, dans une échelle plus grande, de l'ordre des centaines de milliers de kg par exemple, l'effet devient plus remarquable et ceci a répondu à plusieurs questions scientifiques, et nous a permis de créer de nouvelles technologies : Pourquoi la Terre tourne-t-elle autour du Soleil ? Comment a-t-on pu mettre en orbite des satellites artificiels ? Comment peut-on déterminer la masse des planètes sans les "mesurer à la balance"? Que sont les trous noirs, qui ont longtemps intrigué les physiciens ? Pourquoi n'arrive-t-on pas à les observer à travers nos capteurs ?

Rappel

Commençons d'abord par écrire l'expression d'une force gravitationnelle. Comme mentionné dans l'introduction, on a besoin de deux masses M et m. L'interaction entre eux met en œuvre une force **attractive** de la forme :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\vec{F}_{m \rightarrow M} = -\frac{G.m.M}{r^2}.\vec{n}$$

- $G=6,67.10^{-11}(S.I)$ est la constante universelle de gravitation (je vous laisse déterminer sa dimension)
- r est la distance entre les deux masses m et M, supposées ponctuelles. Dans le cas où les masses sont sphériques, comme le cas des planètes, r représentera la distance entre les centres des deux planètes respectives.

L'intuition derrière cette formule, c'est que plus les masses mises en jeu augmentent, plus l'intensité de la force gravitationnelle attractive augmente, et plus elles s'attirent entre elles-mêmes (nous sommes "collés" à la Terre, car sa masse est suffisamment grande

pour nous attirer vers elle).

De même, plus les deux masses s'éloignent entre elles, plus l'interaction gravitationnelle s'affaiblit jusqu'à ce qu'elle devienne imperceptible (les astronautes dans l'Espace "subissent moins" la gravitation terrestre que les humains sur Terre). On peut se demander pourquoi on a mis exactement r^2 au lieu de r par exemple. La raison c'est pour que ça reste cohérent avec les observations et résultats établis, notamment la 3^{eme} loi de Kepler qu'on va voir un peu plus loin dans le cours.

Quelques ordres de grandeur

- calculer la force gravitationnelle entre deux protons présents dans un noyau sachant que : $m_{proton}=1.67.10^{-27}{\rm kg}$ et $R_{noyau}\sim 10^{-10}{\rm m}$
- calculer la force gravitationnelle entre deux hommes au souk .
- calculer la force gravitationnelle entre la Terre et la lune sachant que $M_{Terre} = 6.10^{24}$ kg, et $M_{Lune} = 7,35.10^{22}$ kg et distance $_{Terre-Lune} = 38400$ km.

Au niveau microscopique, à l'échelle atomique, les forces gravitationnelles peuvent être largement négligées devant les autres interactions (notamment les interactions électromagnétiques et les interactions fortes). ¹⁷ En effet, la gravitation n'intervient réellement qu'à partir de l'échelle planétaire.

9.1 La trajectoire d'un satellite / une planète en orbite

9.1.1 L'énergie potentielle d'une planète

On connaît désormais l'expression de la force de gravitation. Ainsi on peut déduire, d'après les outils du cours précédent Mécanique 3, **l'énergie potentielle** d'une planète en orbite, autour du soleil par exemple :

$$E_p = -\int \vec{F}_{soleil \to Terre} . d\vec{l}$$

donc

$$E_p = -\int -\frac{G.m_{terre}M_{soleil}}{r^2}dr$$

En intégrant par primitive :

$$E_p = -\frac{G.m_{terre}M_{soleil}}{r} + Cste$$

Or $cste = E_p(+\infty) = 0$, car justement plus on s'éloigne, plus la force gravitationnelle diminue, il s'ensuit de même pour l'énergie potentielle de gravitation, jusqu'à s'annuler a l'infini. Donc :

$$E_p = -\frac{G.m_{terre}M_{soleil}}{r}$$

¹⁷L'interaction forte est la force qui maintient les protons et les neutrons unis dans le noyau des atomes, malgré la répulsion électrique entre les protons, tous chargés positivement.

9.1.2 Les lois de Kepler

A travers les observations astronomiques qu'il avait menées, et avant que l'expression de la force de gravitation soit découverte par Newton, Kepler a pu déterminer trois lois par lesquelles le mouvement des planètes est régi. Nous allons discuter deux lois dans ce cours. Mais d'abord, il est nécessaire de connaître qu'est ce qu'une **ellipse** ainsi que ses propriétés géométriques:

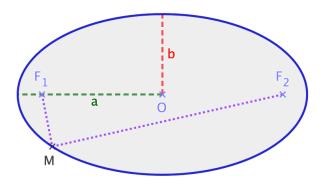


Figure 25: Une ellipse

Il s'agit d'une forme "ovale" caractérisée par :

- Une demi-grand axe a
- Un demi-petit axe b
- Deux foyers F_1 et F_2 qui se situent à la même distance du point O.
- Remarquons que le cercle est un cas particulier de l'ellipse lorsque a=b=Rayon du cercle et F_1 et F_2 sont confondus.

Les propriétés analytiques et géométriques d'une ellipse sont très nombreuses, et autant intéressantes et subtiles. Malheureusement, nous n'allons pas les voir en détail dans ce cours. Cependant, je vous conseille fortement de bien lire a tête reposée l'annexe en question à la fin du cours.

Proposition 9.1 (La première loi de Kepler). Chaque planète se déplace sur une orbite elliptique, avec le soleil situé sur l'un des foyers de l'ellipse.

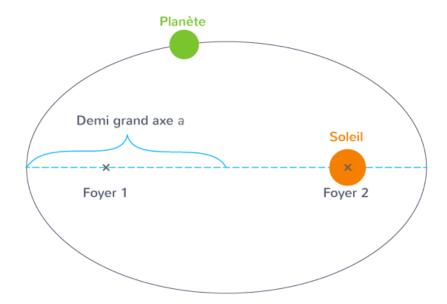


Figure 26: Une trajectoire elliptique

Ce résultat peut bel et bien être généralisé pour toute planète qui orbite sous l'effet de la force gravitationnelle autour d'une étoile suffisamment massive ($M_{\acute{e}toile} >> M_{planete}$). De même, les satellites orbitent selon une trajectoire elliptique dont l'un des foyers est une planète. De même pour la lune.

La troisième loi de Kepler

"Pour deux planètes quelconques en orbite autour du Soleil, le rapport du carré de leur période orbitale divisé par le cube de leur **demi-grand axe** est le même." Mathématiquement:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{soleil}} = \mbox{ constante qui ne dépend pas de la planète}$$

- a = demi-grand axe
- T = période de révolution = le temps nécessaire pour qu'une planète effectue un tour autour du soleil.
- Comme mentionné précédemment, ce résultat reste valable lorsqu'un corps orbite autour d'un corps suffisamment massif (La lune et les satellites artificielles autour de la terre par exemple)
- ATTENTION : il faut que le corps en question orbite sous l'influence d'une seule force gravitationnelle, sous l'influence du soleil pour les planètes du système solaire. Par exemple, si une planète se trouve entre 2 étoiles, il va être sous l'effet de DEUX forces gravitationnelles de sens et de direction différents. Un tel cas devient en effet très compliqué à étudier.
- Démontrer ce résultat est difficile, mais on peut déja le démontrer dans le cas d'une orbite **circulaire**.

Applications: On suppose ici que les trajectoires des planètes sont plutôt circulaires. On peut se permettre de faire une telle approximation car le demi-grand axe et le demi-petit axe des trajectoires elliptiques des planètes du système solaire sont en réalité assez proches $a \sim b$ (Les questions ci-dessous sont indépendantes)

- On sait que la lumière qui provient du soleil arrive à la planète Terre dans une durée de 8 minutes et 20 secondes avec la vitesse $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$. Calculer la masse du soleil. Même question pour la Terre sachant que $d_{Lune-Terre} = 384400 \text{km}$ C'est l'une des méthodes utilisées pour calculer la masse des étoiles et des planètes! Actuellement, on a accès à des méthodes bien plus sophistiquées, comme la méthode de la vitesse radiale que vous avez déjà vu, \hat{o} candidats du TC, dans le test de sélection.
- Un satellite géostationnaire est un satellite qui tourne a la même vitesse angulaire que celle de la rotation de la Terre autour d'elle même, ainsi le satellite arrive à observer et suivre une même section de la Terre durant son trajet. Quelle est la distance entre la Terre et un tel satellite sachant que la masse de la terre est égale a 6.10²⁴kg?
- Qu'en est-il pour Uranus : calculer T_{Uranus} en années terrestres sachant que $d_{Uranus-soleil} = 19 \ (U.A)$ et $M_{Soleil} = 2.10^{30} \ Kg$.

Note 9.1. La période orbitale d'Uranus est en réalité différente de celle trouvée ci-dessus. En effet, bien que son orbite soit elliptique, elle est perturbée par l'influence gravitationnelle d'autres corps célestes. Les scientifiques ont supposé la présence d'un objet céleste à une position bien précise et dont le champ gravitationnel peut justifier cette anomalie. Après quelques années, ils ont découvert la planète Neptune qui se trouvait exactement à la position calculée : Les scientifiques avaient donc prédit l'existence de Neptune avant de la découvrir réellement !!! La science n'est-elle pas finalement belle et fascinante ??!!

9.2 Vitesse de libération et Trou noir

Bien que plusieurs planètes orbitent autour d'une étoile, il se peut que quelques unes s' éloignent de leur étoile jusqu'à s'échapper indéfiniment de celle-ci. Pour étudier ce phénomène nous allons nous intéresser à l'aspect énergétique du problème.

9.2.1 Étude énergétique

D'après la section 9.1.1, l'énergie potentielle de la planète est exprimée par:

$$E_p = -\frac{G.m.M}{r}$$

L'énergie potentielle représente à quel point la force de gravitation "travaille". D'une autre part, l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

• Si l'interaction de gravitation est suffisamment forte pour attirer la masse m, on obtient $|E_p| >> |E_c|$, et donc la masse va continuer d'orbiter sous l'effet de l'interaction gravitationnelle autour de son astre (la Terre orbite autour du Soleil), ou la masse m va tout simplement rester à la surface de l'astre (Les humains sur Terre).

• Mais inversement si à un moment donné $|E_p| < |E_c|$, cela veut dire que la masse m possède suffisamment d'énergie pour se "libérer", en effet l'énergie E_p n'est plus suffisante pour maintenir la planète en orbite.

Donc la condition de "libération" est que $|E_p| < |E_c|$

$$\frac{G.m.M}{r} < \frac{1}{2}mv^2$$

donc

$$v > \sqrt{\frac{2.G.M}{r}} = v_{lib\acute{e}ration}$$

L'expression est cohérente avec l'intuition physique :

- Plus on est loin de l'astre ou d'un objet astrophysique, plus il est facile de se libérer de son champ gravitationnel.
- Cependant, si la masse M est trop grande, la vitesse nécessaire pour se libérer du champ gravitationnel devient trop importante, voire impossible à atteindre. Et si $v_{libération} > c$??

Il n'y a en effet rien qui empêche la masse d'être arbitrairement grande, suffisamment grande pour que la vitesse de libération dépasse la vitesse de la lumière, qui est d'ailleurs, d'après les théories modernes de la physique, la plus grande vitesse atteinte dans l'univers. Existe-t-il donc des corps suffisamment massifs que rien ne pourrait en échapper ??

9.2.2 Le trou noir

Si $v_{lib\acute{e}ration} = v_{lib} = c$, alors aucun corps ne peut échapper à l'astre en question, $m\^{e}me$ la lumière. Pour une masse de l'astre M fixé, $v_{lib} = c$ implique que :

$$\sqrt{\frac{2.G.M}{r}} = c$$

soit,

$$r = \frac{2.G.M}{c^2} = R_s$$

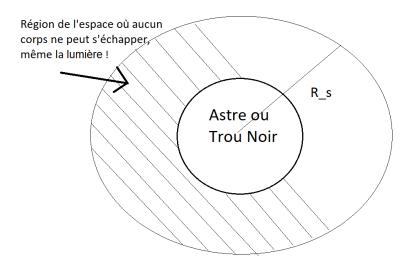
- Il s'agit de ce qu'on appelle le Rayon de Schwarzchild. C'est la distance, ou le rayon à partir duquel la vitesse de libération atteint la vitesse de la lumière. Dans une sphère de rayon R_s , et de masse M aucun corps ne peut se libérer de l'astre.
- Le cas qui nous intéresse bien évidemment c'est lorsque le rayon de l'astre $> R_s$. Ceci n'est vérifié que si l'astre est trop massif :

$$R_s > R_{astre} \ implique \ M > \frac{R_{astre}.c^2}{2.G}$$

Dans ce cas, on parle plus d'un astre mais d'un **trou noir!**

Qu'est ce qu'un trou noir?

"Un trou noir est une région de l'espace où la gravité est si intense que rien, pas même la lumière, ne peut s'en échapper"

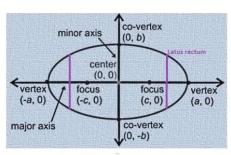


Note 9.2. En temps normal, le rayon de Schwarzchild d'un objet astrophysique est trop petit. (calculer $R_s(Terre)$ et la comparer au rayon de la terre, de même pour le soleil). En effet la condition $R_s > R$ où R est le rayon de l'astre n'est vérifiée que pour les corps trop lourds.

Quelques propriétés

- On n'arrive pas à observer les trous noirs, car même la lumière n'y échappe pas. Ainsi, on ne fait qu'observer son effet sur **l'espace visible de l'univers**. Mais les photons (la lumière) ont une masse nulle, nonobstant, ils sont affectés par la gravitation. En effet, c'est parce que la relativité générale nous dépeint la gravitation sous une autre forme, beaucoup plus fascinante. Elle n'est plus une force qui agit, mais plutôt une déformation de l'espace dans lequel la lumière se propage!
- L'une des origines de création d'un trou noir est **l'effondrement des étoiles** qui se consomment (consomment leur propre "carburant" nucléaire), jusqu'à ce que la pression des étoiles domine l'effet des liaisons électrostatiques, ainsi l'étoile s'effondre et la matière se condense en un seul point sous l'effet de la pression. Cependant, il existe beaucoup d'autres origines derrière la création d'un trou noir.....

ANNEXE



The standard form of the equation of an ellipse with center (0,0) is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

where

- a > b
- ullet the length of the major axis is 2a
- the coordinates of the vertices are $(\pm a,0)$
- the length of the minor axis is 2b
- the coordinates of the co-vertices are $(0,\pm b)$
- the coordinates of the foci are ($\pm c,0$), where $c^2=a^2-b^2$

Ellipse Equation

Area of ellipse = πab

Perimeter of ellipse =
$$2\pi \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{2}}$$

The standard form of the equation of an ellipse with center (h, k) is

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

where

- a > b
- the length of the major axis is $2a\,$
- the coordinates of the vertices are $(h\pm a,k)$
- the length of the minor axis is 2b
- the coordinates of the co-vertices are $(h,k\pm b)$
- the coordinates of the foci are $(h\pm c,k)$, where $c^2=a^2-b^2$

10 Introduction aux ondes

Qu'est-ce qu'une onde?

Depuis tout petit, nous entendons parler des ondes. Qui n'a jamais observé les vagues de la mer (à moins peut-être d'être né à Fès!) ? Nous parlons aussi des ondes sonores qui nous permettent d'entendre, ou des ondes lumineuses grâce auxquelles nous voyons le monde. Ce mot 'onde' revient partout, mais bien souvent, nous n'avons qu'une idée floue de ce qu'il signifie vraiment. Le but de ce cours est justement d'y voir plus clair et de comprendre ce qu'est une onde.

Une première idée : On pourrait dire, dans un sens large, qu'une onde est simplement quelque chose qui se propage dans l'espace et dans le temps. Mais cette définition est trop vague. Si on s'y tient, ssi Brahim qui court dans le douar serait une onde : après tout, il se déplace bien dans l'espace au fil du temps. C'est là qu'apparaît la subtilité.

Ce qui se propage n'est pas de la matière : Dans une onde, ce qui se déplace n'est pas de la matière en bloc, comme ssi Brahim courant sur la route. Ce qui se propage, c'est une perturbation, une déformation, ou plus généralement, de l'énergie. Par exemple, quand une vague traverse la mer 27, l'eau ne voyage pas de la plage vers le large : chaque goutte d'eau ne fait que monter et descendre autour de sa position. C'est la forme de la vague, l'ondulation, qui avance, et avec elle l'énergie qu'elle transporte.



Figure 27: The Great Wave of Kanagawa

En résumé : Une onde, c'est un phénomène dans lequel une perturbation se propage, transportant de l'énergie, sans transporter de la matière.

Cela rend les ondes à la fois fascinantes et fondamentales : elles permettent de transmettre des informations et de l'énergie d'un point à un autre, sans qu'aucune particule matérielle ne fasse tout le trajet.

Le but de tout physicien, confrère de Feynman, est de traduire les phénomènes du monde réel dans un langage mathématique (même si celui-ci n'est pas toujours rigoureux au sens strict des mathématiciens). Pourquoi ? Parce que le langage mathématique permet de formuler des lois générales, de faire des prédictions, et de vérifier ensuite si la nature se comporte comme prévu.

Mais les phénomènes qui nous entourent sont souvent d'une complexité incroyable : il y a toujours trop de détails, trop d'effets secondaires, trop d'interactions. Les physiciens se réjouissent donc de pouvoir commencer par des *modèles jouets* (toy examples), des

situations simples qu'ils peuvent analyser complètement. Puis, petit à petit, ils ajoutent de la complexité, en introduisant le moins de paramètres possibles, pour essayer de décrire des cas de plus en plus généraux.

C'est une manière de penser qui se retrouve partout en physique : que l'on parle de mécanique, de thermodynamique ou d'électromagnétisme. Et nous allons l'appliquer ici au phénomène des **ondes**.

10.1 Onde sinusoïdale

Pour commencer, penchons-nous sur un cas très simple : l'onde sinusoïdale. C'est l'exemple le plus élémentaire et le plus important, car il servira de « brique de base » pour comprendre des phénomènes beaucoup plus complexes.

On peut la créer très facilement : il suffit de prendre une longue corde, d'attacher une extrémité à un mur, et de secouer l'autre extrémité de haut en bas, comme montré sur la figure 28.

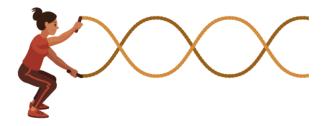


Figure 28: Création d'une onde sinusoïdale sur une corde

Une belle forme ondulée apparaît et se propage le long de la corde. C'est une onde. Et dans ce cas précis, une onde **transverse**, car la corde se déplace perpendiculairement à la direction de propagation.

On peut décrire la forme et le mouvement de cette onde par une équation très simple :

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

où:

- A est l'amplitude (la hauteur maximale des oscillations),
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le **nombre d'onde**, lié à la longueur d'onde λ ,
- $\omega = 2\pi f$ est la **pulsation**, liée à la fréquence f

On remarque également que, puisque l'expression $kx-\omega t$ apparaît à l'intérieur d'un sinus, elle doit être sans dimension. Il en découle que kx et ωt sont eux aussi sans dimension, ce qui implique que l'unité de k est $[L]^{-1}$ et celle de ω est $[T]^{-1}$. La grandeur $\frac{\omega}{k}$ a donc les dimensions d'une vitesse. On introduit ainsi $v=\frac{\omega}{k}$ comme la vitesse de propagation de l'onde le long de l'axe x. La fonction y(x,t) peut alors se réécrire sous la forme

$$y(x,t) = A\sin(k(x-vt)).$$

Pour mieux comprendre cette fonction de deux variables, fixons d'abord $x = x_0$. On obtient alors une fonction uniquement du temps :

$$g(t) = y(x_0, t) = A\sin(kx_0 - \omega t),$$

où kx_0 joue le rôle d'un déphasage initial. Cette fonction oscille entre -A et A avec une fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et décrit comment un point de la corde situé à l'abscisse x_0 se déplace au cours du temps. Il est important de souligner que ce point reste toujours à la même position horizontale : il oscille seulement verticalement. Ainsi, ce n'est pas un déplacement des points le long de x, mais plutôt l'ensemble des points de la corde qui effectuent des oscillations synchronisées de telle manière qu'elles donnent naissance à une onde sinusoïdale se propageant dans la direction x. C'est cette chorégraphie collective qui crée l'illusion d'une onde en mouvement.

Fixons maintenant le temps à $t = t_0$. C'est similaire à prendre une photo de l'onde qui se propage comme dans la figure 28. Ce que nous recevons dans notre image est la fonction étenddue sur l'espace $f(x) = A \sin(kx - \omega t_0)$, avec maintenant ωt_0 le déphasage.

Cette onde sinusoïdale constitue une simplification considérable qui nous permet d'analyser aisément les ondes périodiques que nous connaissons. En réalité, on verra qu'il est possible de considérer toute fonction de la forme h(x,t) = f(x-vt), qui représente alors une onde se propageant à la vitesse v. Cette fonction peut être périodique ou non.

Un résultat extrêmement puissant, dû aux travaux de Fourier au début du XIX^e siècle, montre que toute onde périodique peut être décomposée en une somme (éventuellement infinie) d'ondes sinusoïdales. Ainsi, en comprenant le comportement de chaque sinusoïde prise individuellement, puis en les additionnant, on peut analyser et décrire n'importe quelle forme d'onde périodique.

10.2 Exemples d'ondes

La beauté de la physique tient à sa capacité à rassembler une multitude de phénomènes très différents sous un même cadre, simplement en analysant leurs comportements. Les physiciens ont ainsi identifié et classé une grande variété d'ondes. Parmi les plus étudiées, on trouve les ondes mécaniques, les ondes électromagnétiques et, plus récemment, les ondes gravitationnelles.

Les ondes mécaniques nécessitent un milieu matériel pour se propager. Elles résultent de la transmission d'une déformation locale aux points voisins du milieu. Parmi elles, on trouve notamment les ondes sonores, qui sont des ondes de compression et de dilatation de l'air (ou d'un autre fluide). Comme on l'observe sur la figure 29, les zones où l'air est comprimé correspondent aux crêtes de l'onde sonore, tandis que les zones où l'air est dilaté correspondent aux creux. C'est ainsi que le son se propage : par la succession ordonnée de compressions et de raréfactions de l'air provoquées par les vibrations d'une source.

Figure 29: Onde du son

On compte également parmi les ondes mécaniques celles qui se propagent le long d'une corde tendue. Elles illustrent la propagation d'une perturbation transverse : les points du milieu oscillent perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde.

Les **ondes électromagnétiques** sont des ondes qui se propagent même dans le vide. Elles sont faites de champs électriques et magnétiques qui vibrent ensemble. La lumière que nous voyons, les ondes radio, les micro-ondes ou encore les rayons X sont tous des exemples d'ondes électromagnétiques. Elles se distinguent principalement par leur fréquence et leur longueur d'onde comme indiqué dans l'image 30.

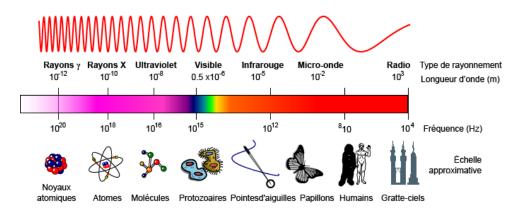


Figure 30: Ondes électromagnétiques

Enfin, les **ondes gravitationnelles** sont des vibrations de l'espace-temps lui-même. Elles ont été prévues par la théorie de la relativité générale et se déplacent à la vitesse de la lumière. Elles sont créées par des mouvements violents de masses très grandes, comme quand deux trous noirs fusionnent. Leur détection récente permet aux scientifiques d'observer l'Univers d'une manière complètement nouvelle.

Ainsi, bien que leur nature physique soit distincte, ces différents types d'ondes partagent des descriptions mathématiques similaires, basées sur des équations aux dérivées partielles exprimant comment une perturbation évolue et se propage.

10.3 Ondes qui conservent leur forme

Envoyons une impulsion sur une corde horizontale tendue. Chaque point de la corde bouge à peine, mais la forme de l'impulsion se déplace loin. Et (en bonne approximation) la forme reste la même.

Voici un instantané d'une telle impulsion :



Figure 31: Instantané d'une impulsion.

Après un temps τ , chaque point de l'impulsion s'est déplacé de $v\tau$:

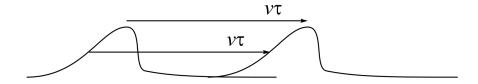


Figure 32: Instantané d'une impulsion après un temps τ .

Si la forme initiale est f(x), alors la déformation verticale est :

$$t = 0 \quad y(x,t) = f(x)$$

$$t = \tau \quad y(x,t) = f(x - v\tau)$$

Théorème 10.1 (Onde conservant sa forme). Une onde se déplaçant vers la **droite** à la vitesse v est y(x,t) = f(x-vt), vers la **gauche** y(x,t) = f(x+vt).

Cela peut sembler contre-intuitif — on s'attend à ce que le mouvement vers la droite corresponde à un + — mais c'est bien ce que montre le raisonnement.

On a montré y(x,t) en fonction de x à un instant t_0 : Et à position fixe x_0 ? La courbe $y(x_0,t)$ est le miroir de celle ci-dessus : montée abrupte, puis descente douce.

10.4 Superposition et ondes stationnaires

Une onde va vers la droite : f(x-vt). Une autre vers la gauche : g(x+vt). La somme :

$$f(x - vt) + g(x + vt).$$

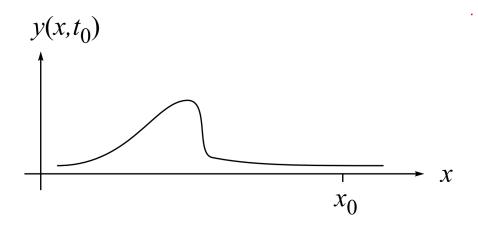


Figure 33: Instantané d'une impulsion.

C'est la « superposition ».

[Ce n'est pas vrai pour toutes les ondes, mais c'est vrai pour les ondes dites « linéaires » que nous étudierons ici.]

Ci-dessous, une grande onde semi-circulaire va vers la droite, une petite vers la gauche. Lorsqu'elles se croisent, elles s'additionnent. Puis continuent comme si de rien n'était.

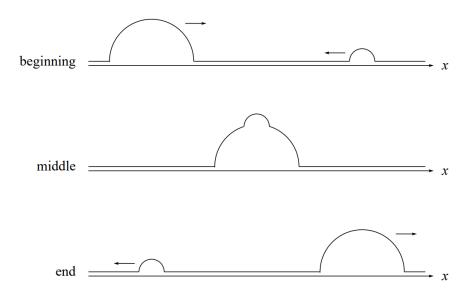


Figure 34: Superposition de deux impulsions.

Idem si l'onde à gauche est orientée vers le bas :

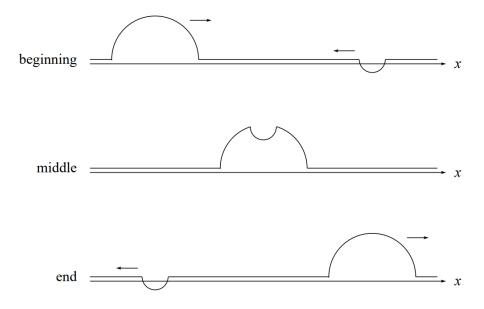


Figure 35: Superposition avec onde négative.

Si les deux ont la même taille, elles s'annulent parfaitement :

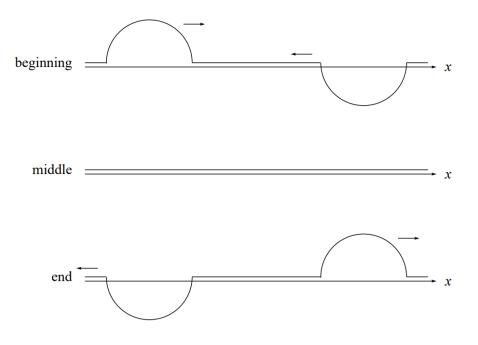


Figure 36: Annulation parfaite.

Ce serait comique si vous arriviez en retard au cours juste au moment où la corde semble droite, puis deux ondes semi-circulaires apparaissent!

C'est un paradoxe. Comment une corde peut-elle soudain créer deux ondes à partir d'un état plat ?

On résoudra ce mystère dans l'exercice suivant.

Exercise 10.1 (Une onde qui voyage!). On observe une corde tendue. Une **perturbation** (une bosse) se propage vers la droite sans changer de forme. La hauteur y(x,t) de la corde à la position x et au temps t est donnée par la formule :

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

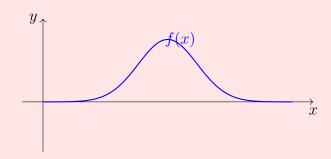
où :

- f est une fonction qui donne la forme de l'onde au temps t = 0,
- v est une vitesse constante (celle de l'onde),
- y(x,t) est la hauteur de la corde.
- 1. Lire dans la formule Quand t augmente, que fait l'expression x vt? Que se passe-t-il alors pour y(x,t) = f(x vt)? \rightarrow Est-ce que la bosse avance, recule, ou reste immobile ? Explique.
- 2. **Imaginons un instant figé** On fige le temps à t = 0. Alors y(x,0) = f(x). Décris l'aspect de la corde à cet instant. À quoi ressemblerait la corde si f(x) est une bosse centrée en x = 3?
- 3. Observer le mouvement d'un point Un point de la corde est fixé en x = 2. Il monte, descend, ou reste immobile au fil du temps ? Pour le savoir, on regarde sa vitesse verticale :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$$

En utilisant que y(x,t)=f(x-vt), trouve cette dérivée. Que nous dit ce résultat sur le mouvement du point situé en x=2 ?

- 4. Un moment étrange... Supposons que, à un instant précis, la corde soit complètement plate : y(x,t) = 0 pour tout x. Mais qu'en même temps, la vitesse verticale $\frac{\partial y}{\partial t}$ ne soit pas nulle. \rightarrow Est-ce que la corde est vraiment immobile ? Pourquoi ? Que nous apprend ce paradoxe apparent sur l'intérêt des dérivées en physique ?
- 5. Regarder une onde en mouvement Voici la forme initiale d'une onde à t=0, donnée par une fonction gaussienne :



• Que va devenir cette bosse quand le temps avance?

- Que va faire un point situé en x = 3 ?
- Dessine à la main la nouvelle position de la bosse pour un petit temps t > 0.

Pour réfléchir : Même quand une grandeur semble nulle (comme la hauteur y(x,t)), sa variation instantanée (la dérivée) peut révéler un mouvement caché. C'est cela le raisonnement **infinitésimal** : observer l'invisible grâce aux outils du calcul différentiel.

10.5 Superposition de sinusoïdes

En physique, les systèmes vibrants réels ne génèrent pas qu'une seule onde isolée. Ils créent souvent des combinaisons d'ondes : par exemple, plusieurs ondes peuvent voyager dans un même milieu, dans des directions opposées ou avec des fréquences différentes.

Heureusement, dans les systèmes linéaires (ceux qui obéissent gentiment aux équations), on peut invoquer un super pouvoir :

Théorème 10.2 (Principe de superposition). Si deux ondes $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ satisfont toutes deux l'équation des ondes, alors leur somme

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

est aussi une solution de l'équation.

Ce principe simple a des conséquences profondes. Étudions-en un cas classique.

Deux sinusoïdes progressives en superposition

Commençons par deux ondes sinusoïdales qui se déplacent dans des directions opposées, avec même amplitude et même fréquence :

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$
 (vers la droite),
 $y_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$ (vers la gauche).

Ces deux ondes pourraient par exemple représenter une onde incidente et une onde réfléchie sur une extrémité fixe d'une corde. Leur somme est :

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t).$$

Utilisons l'identité trigonométrique suivante (qu'on peut redémontrer si on l'a oubliée)

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

En l'appliquant à notre cas, on obtient :

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$
.

Théorème 10.3 (Onde stationnaire sinusoïdale). La superposition de deux ondes sinusoïdales progressives de même amplitude, de même fréquence, et de sens opposés, produit une **onde stationnaire**:

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t).$$

Mais qu'est-ce qu'une onde stationnaire?

À première vue, cette expression ne ressemble pas à une onde qui "se propage". En fait, elle représente un phénomène fascinant : une onde stationnaire.

Définition 10.1 (Onde stationnaire). Une onde stationnaire est une onde qui ne se déplace pas globalement. Elle est formée par l'interférence de deux ondes progressives identiques voyageant en sens opposés. Le résultat est une oscillation locale à chaque point, mais sans transport net d'énergie dans une direction.

Regardons de plus près l'expression :

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

- Le facteur $\sin(kx)$ est **fixe dans le temps** : il décrit une structure spatiale immobile. - Le facteur $\cos(\omega t)$ est **le même pour tout** x (à amplitude près) : chaque point oscille en rythme, mais avec une amplitude qui dépend de sa position.

Nœuds et ventres

Cette forme mathématique décrit une structure avec :

- des **nœuds**, où $\sin(kx) = 0$, donc y(x,t) = 0 tout le temps. Ce sont des points **immobiles**.

Nœuds:
$$x = \frac{n\pi}{k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- des **ventres**, où $|\sin(kx)| = 1$, donc l'oscillation a une amplitude maximale de 2A. Ces points vibrent intensément.

La distance entre deux nœuds successifs est

$$\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$
, avec $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Exemple concret : corde de guitare

Imaginez une corde de guitare pincée. Elle vibre, et les ondes se réfléchissent à ses extrémités. Les ondes se superposent et forment une onde stationnaire: certaines zones de la corde ne bougent jamais (les nœuds), d'autres vibrent fortement (les ventres). Ce sont ces motifs stationnaires qui produisent les notes musicales.

Conclusion

La superposition de deux ondes sinusoïdales n'est pas toujours une simple sinusoïde. Dans des cas particuliers, comme celui de deux ondes opposées, elle révèle des structures riches et fondamentales comme l'onde stationnaire. On retrouve ces motifs dans la musique, la physique des lasers, la mécanique quantique, et bien d'autres domaines.

10.6 Effet Doppler

Imaginons la situation suivante, une ambulance (source de son) se déplace à vitesse v_S alors qu'un passant se déplaçant à une vitesse v_R entend le son de la sirène. La fréquence du son percue par le recepteur dépendra des deux vitesses v_S et v_R . Pour mieux comprendre ce qu'il se passe dans notre situation, on l'illustre dans la figure ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
S & v_S & R & v_R \\
\hline
x_0 & x_S(t) & x_1 & x_R(t)
\end{array}$$

Notons la fréquence du signal de la source f_S et la fréquence du signal du recepteur f_R . La source est initialement à la position $x = x_0$, et le recepteur est initialement à la position $x = x_R$ Notre but est de trouver une relation qui va lier f_S , f_R et les vitesses v_R et v_S .

On sait que la fréquence est égale à l'inverse de la période, i.e. $f = \frac{1}{T}$, qui est le temps entre l'arrivée de deux fronts d'ondes successifs au recepteur, on va donc essayer de trouver l'expression de T_R la période ressentie par le recepteur. Pour ce faire, il est important d'être très méthodique.

A l'instant $t = t_1$, la première onde est émise à la vitesse d'onde v en $x = x_0$, notons l la distance entre x_0 et x_1 .

A l'instant $t = t_1 + \tau_1$ l'onde atteint l'observateur à une position notée O_1 déplacée de $v_R \tau_1$. La distance parcourue par l'onde est:

$$l + v_R \tau_1 = v \tau_1 \implies \tau_1 = \frac{l}{v - v_R} \tag{35}$$

A l'instant $t = t_2$, 2^e onde émise en S_2 , $t = t_2 + \tau_2$, le deuxième front d'onde parcourt la distance $v\tau_2 = l - v_S(t_2 - t_1) + v_R(t_2 + \tau_2 - t_1)$.

On doit maintenant retrouver l'expression de la période émise par la source et la période ressentie par le recepteur. L'intervalle de temps entre les deux ondes est égales à

- $T_S = t_2 t_1$ pour la source.
- $T_R = t_2 + \tau_2 (t_1 + \tau_1)$ pour le recepteur.

On développe la seconde relation pour faire apparaître les fréquences.

$$T_{R} = t_{2} + \tau_{2} - (t_{1} + \tau_{1}) = t_{2} - t_{1} + \tau_{2} - \tau_{1}$$

$$= t_{2} - t_{1} + \frac{l + (v_{R} - v_{S})(t_{2} - t_{1})}{v - v_{R}} - \frac{l}{v - v_{R}}$$

$$= \frac{v - v_{S}}{v - v_{R}}(t_{2} - t_{1})$$
(36)

On prend maintenant le rapport des fréquences et on trouve son expression en fonction de la vitesse d'onde v, la vitesse de la source v_S et la vitesse du recepteur v_R .

$$\frac{f_R}{f_S} = \frac{T_S}{T_R} = \frac{v - v_S}{v - v_R} \tag{37}$$

Exemples

- Les radars utilisés pour repérer les infractions de vitesse utilisent l'effet Doppler pour calculer la vitesse des voitures.
- En médecine, l'échographie Doppler est utilisée pour mesurer avec précision le débit sanguin.

Remarque

Comme vu précédemment, les ondes sonores sont des ondes mécaniques : c'est la vibration des particules du milieu qui transport l'information. Il parait donc naturel de dire que toute chose qui se propage nécessite un messager. Cela dit, comment la lumière, onde électromagnétique, peut se propager à travers l'espace vide à priori (la lumière du soleil et des autres étoiles par exemple) ? Une autre bizarrerie avec la lumière : dès la troisième année collège, on apprend à l'école que la vitesse n'est nullement absolue : tout mouvement est relatif. Ainsi, quelle est la signification de la constante $c=3\cdot 10^8 m.s^{-1}$ qu'on connaît tous par cœur : si on se place dans le référentiel liée au front d'onde de la lumière ne doive-t-on pas obtenir c=0? En d'autres termes, la constante c mesure la vitesse de la lumière par rapport à quoi?

Pour répondre à ces deux problématiques les physiciens du 19ème siècle ont introduit la notion de l'éther, une substance qui remplie tout l'espace et qui transporte la vibration lumineuse, i.e la lumière se propage dans l'ether tout comme le son se propage dans un milieu matériel ou les vagues dans l'eau. En plus, la constante c prend automatiquement un sens, il s'agit de la vitesse de la lumière par rapport à l'éther.

On voit ici la puissance de l'imagination de nos prédécesseurs, par une simple introduction d'une nouvelle notion, on a pu répondre à deux problématiques majeures du 19ème siècle. Toutefois, l'histoire sera trop simple si on en a fini ici. Bien sûr, il fallait chercher une expérience qui détectera cet éther : plusieurs expériences ont été menées, dont la célèbre expérience dite "ratée" de Michelson et Morley. Il fallait attendre 1905, quand un certain Albert Einstein, âgé de 26 ans seulement, publia un article qui bouleversera à jamais la physique. Mais cela est une autre histoire que vous pouvez comprendre si vous choisissez de garder les pas sur le chemin de la physique.

11 Equation d'onde

11.1 Propagation d'une onde sur une corde

Dans cette section, nous cherchons à comprendre comment une perturbation évolue au sein d'une corde¹⁸. Notre objectif est de mettre en place une équation différentielle décrivant cette propagation. Mais comment aborder un tel problème ?

Avant toute chose, il est essentiel de clarifier ce que l'on entend par propagation d'une perturbation. Un point fondamental à retenir est le suivant :"L'onde transporte de l'énergie, mais pas de la matière."

Un lecteur attentif pourrait objecter qu'au passage de l'onde, les points de la corde montent puis redescendent. C'est tout à fait vrai. Toutefois, ces points reviennent ensuite à leur position initiale. Il est donc plus précis de dire que le déplacement *net* de matière est nul : la perturbation se déplace, mais la matière reste localement oscillante autour de sa position d'équilibre. Chaque morceau infinitésimal de la corde gagne en énergie (ou en quantité de mouvement) et transmet cette énergie par la suite. Nous allons supposer que la corde est infiniment souple, elle ne résiste pas aux déformations.

Nous souhaitons trouver une équation qui décrit l'évolution de la déformation (dans notre cas y la hauteur). Comment peut-on procéder? Intuitivement, on voit bien que chaque morceau de la corde est au repos au début, puis accéléré et retourne à son état initial après le passage de l'onde. Pour décrire une accélération, on a qu'un seul outil à notre disposition: la deuxième loi de Newton. Quel système considérer? Quelles sont les forces subies par ce système?

Nous allons essayer de trouver des réponses à ces questions en adoptant un raisonnement infinitésimal. Ce type de raisonnement est beaucoup utilisé en physique et est très utile en général. Nous allons considérer un morceau infinitésimal de la corde de longueur dx. Deux forces sont exercées sur le bout de corde $\vec{F}_1 = \vec{T}(x)$ et $\vec{F}_2 = \vec{T}(x+dx)$. La situation est représentée dans la figure 37.

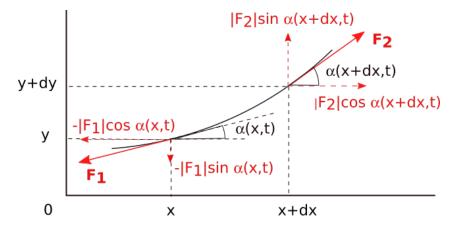


Figure 37: Schéma du morceau infinitésimal de la corde (Wikipédia).

On applique donc la deuxième loi de Newton sur ce bout de corde et on projette les forces sur les axes \vec{e}_x et \vec{e}_y et on obtient les équations suivantes:

¹⁸Une animation illustrant le phénomène est disponible ici : https://www.youtube.com/watch?v= DCaeH-ytRQ8

$$m\vec{a} = ma_x \vec{e_x} + ma_y \vec{e_y} = \vec{T}(x) + \vec{T}(x + dx) \tag{38}$$

On écrit les composantes du vecteur:

$$\begin{cases}
\vec{T}(x) = -T(x)\cos\alpha(x)\vec{e}_x - T(x)\sin\alpha(x)\vec{e}_y \\
\vec{T}(x+dx) = T(x+dx)\cos\alpha(x+dx)\vec{e}_x + T(x+dx)\sin\alpha(x+dx)\vec{e}_y
\end{cases}$$
(39)

où $\|\vec{T}(x)\| = T(x)$ et $\|\vec{T}(x+dx)\| = T(x+dx)$. La projection sur l'axe des abscisses doit être égale à 0. Rappelez-vous, nous avons argumenté au début le fait qu'il n'y a pas de transport net de matière. Le bout de corde est donc accéléré seulement verticalement. Ainsi $a_x = 0$, On conclut grâce à ce raisonnement que:

$$T(x+dx) = T(x) \implies T = cste$$
 (40)

On suppose maintenant que maintenant α est petit. Par conséquent, $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$. La projection sur l'axe des ordonnées donne:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot \alpha(x + dx) - T \cdot \alpha(x) = T(\alpha(x + dx) - \alpha(x))$$
(41)

Tout comme la masse volumique est le quotient de la masse sur le volume, on définit μ la masse linéique qui est le quotient de la masse sur la longueur de la corde, ainsi la masse de la petite portion de la corde considérée est $m = \mu dx$.

De l'autre côté, nous avons $\alpha \approx \tan \alpha$ et $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$ (voir figure 37)

$$ma_y = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \mu dx \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = T(\alpha(x+dx) - \alpha(x))$$
(42)

On divise par dx et on identifie l'expression du taux de variation de $\alpha(x)$.

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\alpha(x + dx) - \alpha(x)}{dx} \longrightarrow T \frac{d\alpha}{dx} \quad \text{quand} \quad dx \longrightarrow 0$$
 (43)

En utilisant $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, on retrouve l'équation d'onde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{44}$$

Cette équation n'est pas simple à résoudre. En revanche, un œil affûté remarquera que la fonction $\sin(kx-\omega t)$ (avec $\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{T}{\mu}$) est une solution. Le terme $\frac{T}{\mu}$ a une dimension de vitesse $m\cdot s^{-1}$. Il correspond à la vitesse de l'onde $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

Quand la masse linéique de la corde est très grande. La vitesse de l'onde devient plus petite.

On peut remarquer que si f et g sont une solution de l'équation (44), alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est aussi une solution. On dit mathématiquement que l'ensemble de solution est un espace vectoriel. Physiquement, cela se traduit par le principe de superposition déjà évoqué lors du cours Ondes 1. Ainsi, avant même d'avoir établi l'équation de propagation, d'après le principe de superposition on devrait s'attendre à ce que l'ensemble de solution soit un espace vectoriel.

L'équation (44) peut être retrouvée dans plusieurs contextes et sous d'autres formes. Par exemple, on aurait pu considérer le cas d'une corde raide. L'équation d'onde devient un peu plus compliquée dans ce cas, des termes en dérivée quatrième apparaissent. Vu notre bagage mathématique à ce stade-là de la compétition, on ne peut pas faire grand-chose.

Théorème 11.1 (Équation d'onde). On considère une onde qui se propage dans un milieu, avec une perturbation S(x,t), l'équation d'onde est la suivante :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

Exercise 11.1. Montrez que toute fonction

$$S(x,t) = f(kx + wt) + g(kx - wt)$$

est solution de l'équation d'onde, où w est la fréquence de l'onde, et k le nombre d'onde.

On peut ajouter que vu le caractère périodique du phénomène des ondes, on opte généralement pour les fonctions trigonométriques pour décrire la perturbation des ondes.

11.2 Cas d'une onde stationnaire et conditions limites :

On se place dans le cas d'une corde de guitare par exemple, de longueur L, et dont les extrémités sont fixes :

$$\forall t$$
, $y(0,t) = y(L,t) = 0$

On s'intéresse ici aux ondes stationnaires, i.e y(x,t) = f(x)g(t). Les conditions limites se traduisent par f(0) = f(L) = 0

On remplaçant dans l'équation, on trouve :

$$f(x)g''(t) = v^2 f''(x)g(t)$$
$$\frac{g''(t)}{g(t)} = v^2 \frac{f''(x)}{f(x)}$$

Nous avons donc une égalité entre deux membres l'un qui dépend uniquement du temps, l'autre ne dépend que de la position. On peut se convaincre facilement que cela ne peut être vrai que si les deux membres sont constants. On pose cette constante A.

Si A > 0, on pose $A = \omega^2$, on obtient l'équation :

$$f''(x) - w^2 f(x) = 0$$

Il est vrai qu'on n'a pas traité une telle équation différentielle dans ce cours, car cela nécessite la connaissance des nombres complexes, cependant, dans le cadre des conditions que nous avons : f(0) = f(L) = 0, l'unique solution possible est f(x) = 0. Ainsi, y(x,t) = 0, et la propagation n'est pas possible. Le lecteur curieux est invité à chercher les solutions d'une telle équation différentielle après une recherche sur les équations du 2ème ordre.

Si A = 0, f est une fonction affine, et en tenant compte des conditions limites, f = 0 donc y(x,t) = 0. La propagation n'est toujours pas possible.

Si A < 0, on pose $A = -\omega^2$. L'équation devient :

$$f''(x) + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 f(x) = 0$$
$$g''(t) + \omega^2 g(t) = 0$$

On pose alors $k=\frac{\omega}{v}$, on le nomme le nombre d'onde, on retrouve la fameuse relation de dispersion. La solution de cette équation est

$$y(x,t) = g(t)(A\cos(kx) + B\sin(kx))$$

En tenant compte des conditions limites y(0,t) = y(L,t) = 0, on a

$$y(0,t) = Ag(t) = 0 \iff A = 0$$

De l'autre côté, $B \neq 0$ pour avoir une solution non nulle mais on aura $\sin(kL) = 0$, ainsi k ne peut que prendre des valeurs discrètes : $k_n = \frac{n\pi}{L}$. On a alors une quantification des longueurs d'ondes permises dans la cordes, et sachant que $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$.

On obtient ainsi les modes propres de la corde, et on peut voir que, si on est au mode propre n_0 , on a pour $x_i = L \times \frac{i}{n_0}$ où $i \in \{0, n_0\}$, $\forall t, y(x_i, t) = 0$. Il s'agit des nœuds de la corde. Entre chaque deux nœuds, on observe un extrêmum, ce sont les ventres de la corde. Ainsi, au n-ième mode propre, on a n + 1 nœuds et n ventres.

Remarques

L'équation d'onde, comme dit plus haut, était une percée majeure dans la physique. Le premier à l'avoir établie était le grand Jean Le Rond d'Alembert en 1746. Ce raisonnement infinitésimal est sans doute un des points forts de toute la physique, et comme le verra le lecteur, on le rencontrera plusieurs fois dans ce cours. Un exercice peut-être trop ambitieux sera de calculer la vitesse du son dans l'air. Il s'agit du même raisonnement infinitésimal appliqué à des couches successives d'air. Cela nécessite hélas des connaissances poussées en thermodynamique, mais l'analyse du résultat en soit est tout de même intéressante : on retrouve une équation d'onde dont l'inconnue est la pression, et en identifiant la vitesse, on trouve $342m.s^{-1}$! Cela démontre la robustesse de notre raisonnement et nous donne une interprétation des ondes sonores : ce n'est qu'une manifestation de la vibration des particules du milieu où elle se propage.

12 Introduction à l'électromagnétisme

L'électromagnétisme est une branche de la physique qui fournit un cadre très général d'étude des phénomènes électriques et magnétiques. Pourquoi un aimant est-il attiré par le fer ? Quel est la physique derrière les circuits électriques ? L'interaction électromagnétique est une des quatre interactions physiques fondamentales. Elle explique le comportement des objets à l'échelle atomique (comportement des électrons, des atomes et des molécules).

L'électromagnétisme n'est pas apparu d'un seul coup : il est le fruit d'un long processus d'unification de plusieurs théories qui, à l'origine, semblaient indépendantes. Aux XVIII^e et XIX^e siècles, les physiciens étudiaient séparément :

- l'électrostatique, qui décrit les effets des charges électriques immobiles ;
- la magnétostatique, qui s'intéresse aux champs magnétiques créés par des courants constants ;
- l'électrocinétique, qui analyse le comportement des courants électriques dans des circuits.

Ce sont les travaux de **James Clerk Maxwell** au milieu du XIX^e siècle qui ont permis de regrouper toutes ces approches dans une *théorie unifiée du champ électromagnétique*. Grâce à ses célèbres **équations de Maxwell**, il a montré que l'électricité et le magnétisme sont deux aspects d'un même phénomène.

Cette théorie permet d'expliquer :

- la création des champs par des charges et des courants ;
- la propagation des ondes électromagnétiques comme la lumière ou les ondes radio ;
- l'effet des champs sur la matière via la force de Lorentz.

12.1 Le Champ électrostatique :

Premières notions:

Nous avons tous déjà vécu une petite décharge électrique en touchant un objet, ou observé des morceaux de papier attirés par un stylo plastique frotté. Ces phénomènes sont dus à ce qu'on appelle l'**électricité statique**.

Expérience 1 : Attraction d'un objet léger :

Prenons une petite boule légère (en polystyrène, par exemple) suspendue à un fil. Lorsqu'on approche une tige de verre ou de plastique frottée, on observe que la boule est attirée.

Si l'on approche simultanément deux tiges de matériaux différents (verre et plastique), les effets peuvent se compenser : la boule reste immobile.

Interprétation : Chaque tige frottée porte une certaine charge. Il existe deux types de charges :

- Charge positive (verre frotté à la soie) ;
- Charge négative (plastique ou ambre frotté à la fourrure).

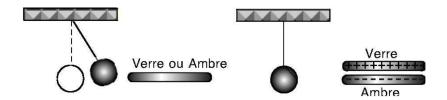


Figure 38: Expérience 1

Expérience 2 : Répulsion et attraction entre boules Prenons deux boules, A et B, qu'on électrise au contact d'une même tige. Suspendues côte à côte, elles réagissent :

- Si elles ont été électrisées avec le même matériau, elles se repoussent.
- Si elles ont été électrisées avec des matériaux différents, elles s'attirent.
- Si elles se touchent, elles se déchargent : plus d'interaction.

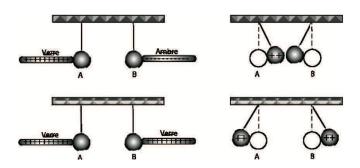


Figure 39: Expérience 2

Ces expériences montrent que :

- Deux charges de même signe se repoussent ;
- Deux charges de signes opposés s'attirent ;
- La charge peut se transférer d'un corps à un autre.

Ces observations expérimentales peuvent être modélisées par une loi physique : la **loi de Coulomb**.

12.1.1 La force de Coulomb:

Note 12.1.

1. On rappelle l'expression de la force de gravitation, principale force visible à notre échelle:

$$\vec{F}_{1\to 2} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_{12}$$

- m_1 et m_2 sont les masses en Kilogrammes (Kg),
- r est la distance entre les deux centres de masse (en mètres),
- \vec{u}_{12} est le vecteur unitaire dirigé de m_1 vers m_2 ,
- $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \ N.m^2.kg^{-2}$: constante gravitationnelle.
- 2. La force électrostatique peut être vue comme l'analogue électrique de la force gravitationnelle: de même que deux masses s'attirent selon la loi de Newton, deux charges interagissent selon la loi de Coulomb, avec une intensité proportionnelle au produit des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

Charles Augustin de Coulomb (1736–1806) a étudié les forces entre deux objets électrisés à l'aide d'une $balance\ de\ torsion$. Il a mis en évidence les propriétés suivantes .

Proposition 12.1.

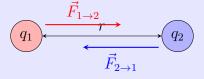
- 1. La force est **radiale** : elle agit selon la droite qui relie les deux charges ;
- 2. Elle est proportionnelle au produit des deux charges q_1 et q_2 ;
- 3. Elle est inversement proportionnelle au carré de la distance r entre elles.

Définition 12.1. L'expression mathématique de cette force, appelée **force de** Coulomb, est :

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_{12}$$

où:

- q_1 et q_2 sont les charges électriques en Coulombs (C),
- r est la distance entre les deux charges (en mètres),
- \vec{u}_{12} est le vecteur unitaire dirigé de q_1 vers q_2 ,
- $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \ N.m^2.C^{-2}$.



Note 12.2.

• La constante ε_0 est appelée la **permittivité électrique du vide** :

$$\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \ F/m$$

- Cette loi est valable pour des charges **ponctuelles** et **immobiles** dans le vide.
- Elle respecte le **principe d'action et de réaction** de Newton : si q_1 exerce une force sur q_2 , alors q_2 exerce une force égale et opposée sur q_1 ,.

Ordres de grandeur

La force électrostatique entre deux électrons est bien plus grande que leur force gravitationnelle. On peut comparer les deux par le rapport :

$$\frac{F_e}{F_q} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 G m_e^2} \approx 10^{42}$$

Cela signifie que, à l'échelle microscopique, la force électrostatique domine largement sur la gravitation. C'est pourquoi les corps célestes (comme les planètes et étoiles) sont globalement électriquement neutres : sinon, les forces de répulsion seraient immenses.

Quelle est la force de répulsion entre deux charges de 1 C situées à 1 km l'une de l'autre ?

$$F = \frac{1 \cdot 1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (10^3)^2} \approx 9 \times 10^9 \cdot \frac{1}{10^6} = 9 \times 10^3 \text{ N}$$

Cette force est équivalente au poids d'une tonne!

Cette modélisation permet de relier les phénomènes observés lors des expériences d'électrisation à une loi universelle, fondamentale en électrostatique.

12.1.2 Champ électrostatique:

Définition 12.2. Le champ électrostatique est une propriété de l'espace créée par la présence de charges électriques immobiles. Il se manifeste par une influence électrique en chaque point de l'espace : il permet de prédire comment une charge électrique se comportera si elle est placée à cet endroit.

Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle:

Une particule chargée q placée à un point O de l'espace crée autour d'elle un **champ** électrostatique.

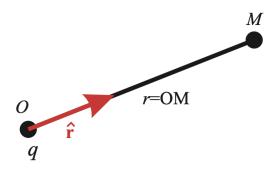


Figure 40: Force électrostatique entre deux charges

Lignes de champ électrostatique créées par une charge ponctuelle *q*



Figure 41: Direction du champ électrostatique

Définition 12.3. En tout point M de l'espace (distinct de O), le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par la charge q est donné par la formule :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u} \quad avec \ \vec{r} = \vec{OM}, \quad r = \|\vec{OM}\|, \quad \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r}$$

$O\dot{u}$:

- ullet r est la distance entre la charge source et le point M.
- \vec{u} est le **vecteur unitaire** dirigé de O vers M.
- $\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \ F/m \ est \ la \ permittivit\'e \ du \ vide.$
- L'unité du champ électrique est le **Volt par mètre** (V/m).

Force éléctrique exercée sur une charge:

Si une charge q_2 est placée en M, elle subit la force :

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E}(M)$$

Nouvelle vision de l'espace Ce modèle introduit une idée essentielle : l'espace autour d'une charge est modifié. Une charge placée dans cet espace ne réagit pas directement à

une autre charge, mais au champ créé par elle en ce point. Ce champ est une **propriété** de l'espace, à la manière du champ gravitationnel.

Champ créé par plusieurs charges — Principe de superposition :

On considère N particules de charges q_i , placées en des points P_i . On cherche le champ électrostatique total au point M.

Résultat expérimental : L'expérience montre que le champ total au point M est simplement la **somme vectorielle** des champs créés par chaque charge q_i :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$$

Principe de superposition Cette propriété s'appelle le principe de superposition. C'est un principe fondamental :

Le champ total est la somme des champs produits par chaque charge, comme si elles étaient seules.

Limite du modèle discret Lorsqu'on étudie un matériau contenant un très grand nombre de particules chargées (comme des électrons ou des ions), il devient pratiquement impossible de s'intéresser à chaque particule individuellement. En effet, dans un morceau de matière ordinaire, il peut y avoir environ 10^{23} charges : un nombre immense qu'on ne peut pas gérer une par une.

Pour simplifier, on remplace cet ensemble de charges discrètes (séparées) par une distribution continue de charge. Cela signifie qu'on suppose que les charges sont réparties de façon fluide et régulière dans l'espace, un peu comme une substance uniforme.

Un bon exemple est la matière elle-même : bien qu'elle soit constituée d'atomes (et donc de particules séparées), on la considère souvent comme continue à notre échelle. Par exemple, la peau humaine est faite de cellules, elles-mêmes composées d'atomes, mais on la perçoit comme une surface lisse et continue. Cette manière de voir les choses est très utile pour faire des calculs, car elle permet d'utiliser des outils mathématiques comme les intégrales pour décrire la répartition des charges.

12.1.3 Ligne de champs électrique :

Les lignes de champ sont un outil visuel utilisé pour représenter un champ électrique dans l'espace. Elles permettent de voir, de manière intuitive, comment une charge électrique influencerait son environnement. Chaque ligne indique la direction que prendrait une petite charge positive si on la plaçait à cet endroit. Plus les lignes sont proches les unes des autres, plus le champ est intense. Les lignes de champ ne sont pas des objets réels, mais une représentation graphique très utile. Elles servent à comprendre comment les charges interagissent entre elles, comment le champ varie dans l'espace, et à prédire le mouvement de particules chargées.

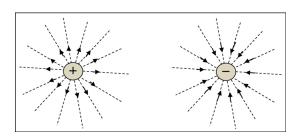


Figure 42: lignes de champs électrique créé par une charge positive et négative

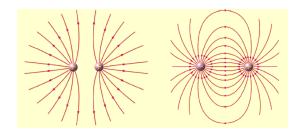


Figure 43: lignes de champs électrique créé par deux charges de signes opposés et deux charges de même signe

Note 12.3.

- 1. Contrairement à la force gravitationnelle, qui jusqu'ici est considérée comme uniquement attractive (masses positives), la force électrostatique peut être attractive ou répulsive, selon le signe de la charge (charges positives ou négatives).
- 2. Deux charges de signes opposés s'attirent (force attractive), tandis que deux charges de même signe se repoussent (force répulsive).

12.1.4 Champ électrostatique uniforme :

Définition 12.4. Un champ électrostatique uniforme est un champ dans lequel la direction, le sens et l'intensité du champ sont les mêmes en tout point. Autrement dit, les lignes de champ sont parallèles, équidistantes, et orientées dans la même direction.

Pour créer un tel champ en pratique, on utilise généralement deux plaques conductrices planes, parallèles, et chargées de façon opposée :

- Une plaque est chargée positivement.
- L'autre est chargée négativement.
- Les plaques sont planes et parallèles.
- L'espace entre les plaques est faible par rapport à leur taille.

Entre ces deux plaques, le champ électrostatique est alors quasi uniforme, surtout loin des bords (où des effets de bord apparaissent). Ce montage est appelé un condensateur plan ou condensateur à armatures planes.

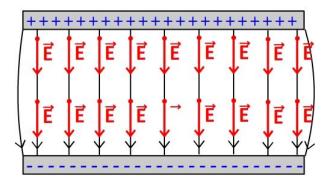


Figure 44: lignes d'un champs électrostatique unifome où on peut observer les effets de bord (lignes courbées dans les extrémités)

12.2 Potentiel électrique :

Note 12.4.

1. Le potentiel gravitationnel en un point de l'espace, créé par une masse M, est donné par :

$$V(r) = -\frac{G \cdot M}{r}$$

- V(r) est le potentiel gravitationnel en J/kg (joule par kilogramme),
- r est la distance entre le point considéré et la masse M (en mètres),
- $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \ N.m^2.kg^{-2}$ est la constante gravitationnelle.

 $\it Il\ se\ manifeste\ suivant\ des\ lignes\ \'equipotentielles\ (m\^eme\ potentiel\ suivant\ une\ m\^eme\ ligne).$

2. Par analogie, le potentiel électrostatique en un point de l'espace, créé par une charge Q, est donné par :

$$V(r) = \frac{k \cdot Q}{r}$$

Il se manifeste aussi suivant des lignes équipotentielles.

- V(r) est ici le potentiel électrostatique en V (volt),
- ullet Q est la charge source en coulombs (C),
- $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9.0 \times 10^9 \ N.m^2.C^{-2}$ est la constante de Coulomb.
- 3. Dans les deux cas, le potentiel permet de décrire l'influence d'un corps (masse ou charge) en un point de l'espace, indépendamment de la présence d'un second objet. Il est à l'origine de forces (gravitationnelle ou électrostatique) lorsque l'on place un second corps dans le champ.

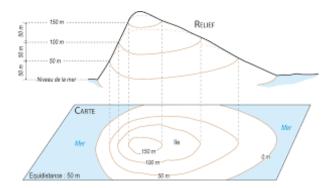


Figure 45: Sur une carte topographique, une ligne reflète des points de même altitude, donc de même potentiel gravitationnel.

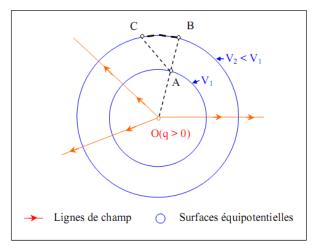


Figure 6

Figure 46: Lignes et surfaces équipotentielles.

12.2.1 Définitions et principes :

Définition 12.5. Le potentiel électrique dans un point P de l'espace est définie comme le travail nécessaire pour ramener une particule d'un point de référence A $(V_A = 0)$ jusqu'au point P divisée par la charge q.

$$V(P) = \frac{W_{A \to P}}{q}$$

Note 12.5. Le potentiel électrique dans un point P de l'espace peut être aussi définie comme le travail nécessaire pour ramener une particule d'e l'infini jusqu'au point P divisée par la charge q.

$$V(P) = \frac{W_{+\infty \to P}}{q}$$

12.2.2 Potentiel créé par une charge ponctuelle :

Définition 12.6. Le potentielle électrique créé par une charge ponctuelle dans un point P de l'espace est :

 $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$

ullet Q : charge ponctuelle créant le potentiel.

• r : distance au centre de la charge.

• ε_0 : permittivité du vide.

12.2.3 Potentiel d'un champs électrostatique uniforme :

Calculons tout d'abord le travail nécessaire pour ramener une particule d'un point $A(x_A, y_A)$ à un point $B(x_B, y_B)$:

$$W_{A\to B}(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot \vec{AB} = q\vec{E} \cdot \vec{AB},$$

on suppose que $\vec{E} = E_0 \vec{e_y}$, Alors : $W_{A \to B}(\vec{F_e}) = qE_0(y_B - y_A)$. en prenant A = O(0,0) comme un point de référence, on trouve :

$$V(B) = \frac{W_{A \to B}(\vec{F_e})}{g} = E_0 y_B$$

Grandeur	Gravitation	Électrostatique
Objet source	Masse m (en kg)	Charge électrique q (en C)
Force (expression vectorielle)	$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{u}$	$\vec{F} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{u}$
Constante	$G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$
Nature de l'interaction	Toujours attractive	Attractive ou répulsive
Potentiel en un point	$V(r) = -\frac{G \cdot M}{r}$	$V(r) = \frac{k \cdot Q}{r}$
Unité du potentiel	Joule par kilogramme (J/kg)	Volt (V) ou Joule par Coulomb (J/C)
Champ associé	Champ gravitationnel $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$	Champ électrique $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

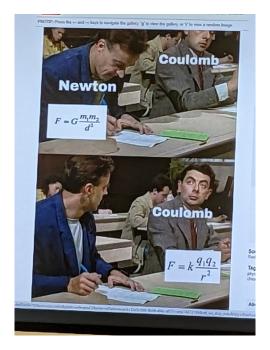


Figure 47: Figure essentielle à connaître.

12.3 Le champ magnétique

12.3.1 Un aperçu historique du champ magnétique :

Les aimants sont connus depuis l'Antiquité, sous forme de **magnétite**, une pierre naturelle découverte près de la ville de Magnésie (Turquie), d'où vient le mot *magnétique*.

Les Chinois ont été les premiers à utiliser les aimants pour fabriquer des boussoles, il y a plus de 1000 ans.

Premiers liens entre électricité et magnétisme : Au XVIII^e siècle, Benjamin Franklin montre que la foudre est un phénomène électrique. Les marins remarquent aussi que :

- les orages perturbent les boussoles ;
- la foudre peut aimanter les objets métalliques.

Franklin propose alors que les phénomènes électriques et magnétiques pourraient être liés.

L'expérience historique de Ørsted (1820) : En 1820, le physicien danois Hans Christian Ørsted réalise une expérience qui va bouleverser la compréhension des phénomènes électriques et magnétiques.

Il place une **boussole** sous un **fil conducteur horizontal**, puis ferme un circuit électrique pour y faire passer un **courant continu**. À sa grande surprise, l'**aiguille de la boussole se déplace** dès que le courant circule.

- Lorsque le courant est **coupé**, l'aiguille revient à sa position initiale (alignée avec le Nord magnétique).
- Si Ørsted inverse le sens du courant, la déviation change de direction.

Cette expérience montre clairement que :

- un courant électrique produit un effet magnétique dans son voisinage ;
- la direction de la force n'est pas radiale (elle n'est pas orientée vers le fil), mais perpendiculaire à celui-ci.

Ce fut la première preuve expérimentale du lien entre **électricité et magnétisme**. Elle marque la naissance de l'**électromagnétisme** en tant que domaine scientifique.

Conclusion de l'expérience : Le courant électrique crée un champ magnétique autour du fil, capable d'agir sur une aiguille aimantée. Ce champ est invisible, mais ses effets sont mesurables. C'est le début d'un changement de vision dans la physique : un courant n'est pas seulement un déplacement de charges, mais aussi une source de champ dans l'espace.

Vers une théorie complète: Biot et Savart étudient ensuite l'effet d'un courant sur un aimant, ce qui permet à Laplace de formuler la loi qui porte leurs noms. Peu après, Davy montre qu'un aimant peut aussi dévier un courant.

De nombreux physiciens contribuent à la construction de la théorie de l'électromagnétisme: Ampère, Faraday, Lenz, Maxwell, Lorentz....

Maxwell résume cette théorie dans ses équations en 1873, et Einstein en donne une interprétation plus profonde avec la relativité en 1905.

Proposition 12.2. le champs magnétique créé par une particule en mouvement à une vitesse \vec{v} dans une région de l'espace est :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \, \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}_q)}{\left\| \vec{r} - \vec{r}_q \right\|^3}$$

où:

 \times : produit vectoriel,

 μ_0 : perméabilité du vide,

q: charge de la particule,

 \vec{v} : vecteur vitesse de la particule,

 $\vec{r_q}$: position instantanée de la particule,

 $\vec{r} - \vec{r_q}$: vecteur séparant la particule du point d'observation, $||\vec{r} - \vec{r_q}||$: distance entre la particule et le point d'observation.

12.3.2 Lignes de champs magnétique :

Les **lignes de champ magnétique** sont une représentation visuelle du **champ magnétique** dans l'espace. Elles permettent de visualiser comment le champ est orienté et où il est plus ou moins intense.

Voici les principales caractéristiques à retenir :

• Chaque ligne indique la **direction** locale du champ magnétique.

- Le sens des lignes est défini par convention : elles sortent du pôle nord d'un aimant et entrent dans le pôle sud.
- Plus les lignes sont serrées, plus le champ est intense.
- Les lignes de champ ne se croisent jamais.
- Contrairement au champ électrique, les lignes de champ magnétique sont **toujours fermées** : elles forment des **boucles continues**.

Cela signifie que le champ magnétique n'a **ni début ni fin** : à l'extérieur d'un aimant, les lignes vont du nord au sud, mais **à l'intérieur**, elles repartent du sud vers le nord pour boucler le circuit.

Exemple classique

Autour d'un aimant droit, les lignes de champ :

- sortent du pôle nord,
- forment des courbes à l'extérieur de l'aimant,
- reviennent vers le **pôle sud**,
- puis passent à l'intérieur de l'aimant pour revenir au nord.

Cela forme un circuit fermé caractéristique du champ magnétique.

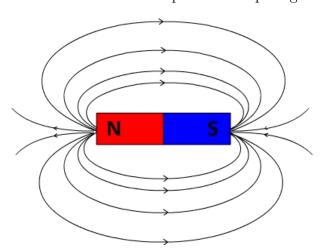


Figure 48: ligne de champs créé par un aimant droit

12.4 Force de Lorentz:

12.4.1 Expression générale :

Définition 12.7. Soit une particule chargé de charge q et un champs électromagnétque (\vec{E}, \vec{B}) , la force exercée par ce champs sur la particule est :

$$\vec{\mathbf{F}} = q \, \vec{E} + q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)$$

- $\vec{\mathbf{F}}$: force sur la charge (en newtons, N).
- q : charge électrique (en coulombs, C).
- $\vec{\mathbf{E}}$: champ électrique (en volts par mètre, V/m).
- $\vec{\mathbf{V}}$: vitesse de la particule (en m/s).
- $\vec{\mathbf{B}}$: champ magnétique (en teslas, T).

12.4.2 Cas particuliers

- Force électrique seule : $\vec{\mathbf{F}}_E = q \, \vec{\mathbf{E}}$ (parallèle à \mathbf{E}).
- Force magnétique seule : $\vec{\mathbf{F}}_B = q\,\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}},$ de norme

$$F_B = |q| v B \sin \theta,$$

avec θ l'angle entre \mathbf{v} et \mathbf{B} . Cette force est toujours perpendiculaire au plan (\mathbf{v}, \mathbf{B}) .

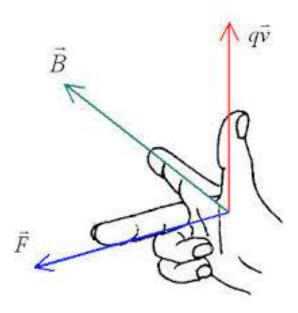


Figure 49: figure montrant la régle de la main droite

13 Principe fondamental de l'électromagnétisme :

13.1 Induction:

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes intéressés essentiellement à la création d'un champ magnétique à partir d'un courant électrique permanent. Ce phénomène a été mis en évidence par l'expérience célèbre du physicien **Oersted**.

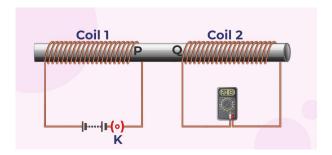
À la même époque, le physicien anglais **Michael Faraday** se pose la question inverse : « Puisque le courant peut produire un champ magnétique, est-il possible de produire un courant à partir d'un champ magnétique ? »

Faraday mène alors plusieurs expériences. Au début, il essaie de produire un **courant permanent**, mais sans succès. Il remarque toutefois certains effets étranges, mais ceux-ci sont toujours **transitoires** (de très courte durée).

Première expérience:

Faraday enroule sur un même cylindre deux fils conducteurs :

- Le **premier fil** est relié à une pile et à un interrupteur.
- Le **second fil** est relié à un **galvanomètre**, un appareil permettant de détecter un courant.



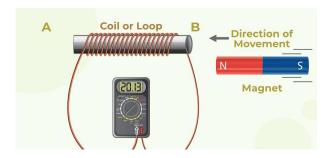
Il sait que lorsqu'un courant circule dans le premier fil, un champ magnétique est créé. Il s'attend donc à voir apparaître un courant dans le second fil. Pourtant :

- Quand l'interrupteur est **ouvert ou fermé en continu**, **aucun courant** n'apparaît dans le second fil.
- Mais lors du changement d'état de l'interrupteur (au moment de l'ouverture ou de la fermeture), une déviation brève de l'aiguille du galvanomètre est observée.
- De même, si on déplace le second circuit alors que le premier est parcouru par un courant, une déviation apparaît également.

Deuxième expérience:

Faraday place un aimant près d'un fil conducteur relié à un galvanomètre.

- Si l'aimant est immobile, aucun courant n'est détecté.
- En revanche, lorsqu'on déplace l'aimant, un courant apparaît dans le fil :



- Le sens du courant dépend de la direction du déplacement (approche ou éloignement).
- Le **courant est plus fort** si le déplacement est plus rapide.

Conclusion de Faraday:

« Quand le flux du champ magnétique à travers un circuit fermé change, un courant électrique apparaît. »

Cette découverte est à la base du phénomène d'induction électromagnétique, essentiel dans le fonctionnement des générateurs électriques.

13.2 Expériences pratiques

13.2.1 Fil conducteur dans un champ

- Matériel : fil conducteur rectiligne, aimant puissant, ampèremètre.
- Protocole : générer un courant dans le fil, placer l'aimant à proximité, observer la déviation du fil.

13.2.2 Rail électromagnétique

- Matériel : deux rails métalliques parallèles, aimant cavalier conducteur, source de tension.
- Protocole : fermer le circuit avec le cavalier muni d'un aimant ; celui-ci est repoussé et se déplace le long des rails.

13.2.3 Effet Hall (optionnel)

- Matériel : lame conductrice, aimant, source de courant, voltmètre.
- Observation : une différence de potentiel apparaît perpendiculairement au courant et au champ.

14 Test Corrigé

14.1 Exercice 1:

Une voiture monte avec une **vitesse constante** $\vec{v} = cos(\alpha)v\vec{e}_x + sin(\alpha)v\vec{e}_y$. Trouver les équations horaires x(t) et y(t).

Solution

On a $\vec{v} = \cos(\alpha)v\vec{e}_x + \sin(\alpha)v\vec{e}_y$. Donc par intégration :

$$x(t) = \cos(\alpha)vt + x_0$$

$$y(t) = \sin(\alpha)vt + y_0$$

14.2 Exercice 2:

On veut estimer la hauteur de la partie non remplie d'eau d'un puits. On laisse tomber sans vitesse initiale un caillou au fond de celui-ci. Si 4.5s s'écoulent entre l'instant où on laisse tomber le caillou et celui où l'on entend le bruit du caillou avec l'eau, et sachant que la vitesse du son dans l'air est $340m.s^{-1}$, quelle est la hauteur de la partie vide du puits?

Solution

On a deux phases du mouvement : d'abord la chute libre du caillou, qu'on suppose sans frottement, et après le contact avec l'eau la phase de propagation du son.

Chute libre Comme établie en cours de mécanique $2: z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$, car la chute était sans vitesse initiale (on prend l'origine du repère la surface de l'eau). Ainsi, à l'instant t_1 où le caillou atteint la surface de l'eau, on a $z(t_1) = 0$, et donc $\frac{1}{2}gt_1^2 = h_0$ ou bien $t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$.

Propagation du son Après le contact avec la surface, le son va se propager à une vitesse $v_{son} = 340m.s^{-1}$. Ainsi, si l'on nomme t_2 la durée de cette phase, on a $t_2 = \frac{h_0}{v_{son}}$.

Conclusion Comme on a $t_1 + t_2 = t_{total} = 4.5$, alors $\sqrt{\frac{2h_0}{g}} + \frac{h_0}{v_{son}} = t_{total}$. On résout l'équation pour inconnu $x = \sqrt{h_0}$. Il s'agit d'une équation de second degré, on trouve :

$$x_{\pm} = \frac{-\sqrt{\frac{2}{g}} \pm \sqrt{\frac{2}{g} + 4\frac{t_{total}}{v_{son}}}}{\frac{2}{v_{son}}}$$

On voit clairement que x_- est négative, or $x = \sqrt{h_0} > 0$. Donc on prend la valeur $x = x_+ = \frac{-\sqrt{\frac{2}{g}} + \sqrt{\frac{2}{g} + 4\frac{t_{total}}{v_{son}}}}{\frac{2}{v}}$. Ainsi, $h_0 = \left(\frac{-\sqrt{\frac{2}{g}} + \sqrt{\frac{2}{g} + 4\frac{t_{total}}{v_{son}}}}{\frac{2}{v_{son}}}\right)^2$. Un réflexe que doit avoir

le lecteur est de vérifier si le résultat est bien homogène à une longueur, cela est laissé comme exercice. On prend $g = 9.8 \ m.s^{-2}$, on trouve $h_0 = 88.2 \text{m}$

14.3 Exercice 3:

Donnez la définition d'une force conservative et citez quelques exemples.

Solution

- Une réponse qui sera acceptée serait une force qui ne dépend pas de la trajectoire suivie, mais uniquement du point du départ et celui de l'arrivée. Une réponse plus naïve, mais peut-être plus vraie, serait une force dont l'énergie potentielle est connue. La définition mathématique plus rigoureuse se trouve dans le cours de mécanique 3.
- On peut citer plusieurs exemples : le poids, la force de gravitation universelle, la loi de Coulomb, même la force de Lorentz (voir le cours d'électromagnétisme). La réaction du plan, la tension du fil ou les frottements ne sont pas conservatifs en général.

14.4 Problème

On considère une particule chargée de masse m et de charge q>0 attaché à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable formant un pendule chargé. On applique un champ $\vec{E}=E\vec{e}_x$, on néglige les frottements. On considère l'angle θ que fait le pendule avec la verticale.

Question 1

Parmi ces forces, les quelles sont conservatives ? \vec{P} : le poids, \vec{T} la tension du fil, \vec{F}_e la force électrique.

Question 2

Où se trouve la position d'équilibre?

Question 3

Trouvez l'énergie potentielle électrostatique associé à la force \vec{F}_e .

Question 4

Trouvez l'équation différentielle du mouvement.

Question 5

Trouvez l'équation du mouvement $\theta(t)$ en considérant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

Solution

Réponse 1

Les forces conservatives sont \vec{P} et \vec{F}_e .

Réponse 2

À l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_e = \vec{0}$$

On projette sur \vec{e}_x et \vec{e}_y :

$$\begin{cases}
-T\sin(\theta_{eq}) + qE = 0 & \text{projection selon } \vec{e_x} \\
T\cos(\theta_{eq}) - mg = 0 & \text{projection selon } \vec{e_y}
\end{cases}$$

On exprime T dans les deux équations, on trouve :

$$T = \frac{qE}{\sin(\theta_{eq})} = \frac{mg}{\cos(\theta_{eq})}$$

On trouve ainsi que $\tan(\theta_{eq}) = \frac{qE}{mg}$, et donc $\theta_{eq} = \arctan(\frac{qE}{mg})$. Il est logique de trouver un rapport entre les deux forces : plus le poids est grand, plus la

Il est logique de trouver un rapport entre les deux forces : plus le poids est grand, plus la particule est tirée vers le bas, et plus la force électrostatique domine, plus la particule est tirée vers la droite.

Réponse 3

On a $\vec{F}e = q\vec{E}$, donc constante.

Donc le travail de cette force sera $W_{A\to B} = \vec{F_e} \cdot \overrightarrow{AB} = qE(x_B - x_A)$, car $\vec{E} = E\vec{e_x}$. D'où $E_p = -qEx + c = -qlE\sin(\theta) + c$, où c une constante (vu que $x = l\sin(\theta)$.

Réponse 4

Comme on n'a pas de frottement, on peut appliquer le théorème de l'énergie mécanique. On utilise les coordonnées polaires, on se contente de rappeler l'expression de la vitesse, la démonstration est dans le cours de mécanique 1. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ (le fil est inextensible donc r = l = cte). Le lecteur est invité à faire une analyse dimensionnelle pour vérifier qu'il s'agit bien d'une vitesse. Ainsi, on a $v^2 = l^2\dot{\theta}^2$. D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta) - qlE\sin(\theta) = cte$$

On se limite aux petits angles, donc $\cos(\theta) \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin(\theta) \simeq \theta$. On a alors :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \frac{\theta^2}{2}) - qlE\theta = cte$$

On dérive :

$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl\dot{\theta}\theta - qlE\dot{\theta} = 0$$

Comme $\dot{\theta}$ ne peut être nulle qu'en des points discret (sinon il n'y a pas de mouvement, on est à l'équilibre et la situation n'est pas intéressante), on peut diviser/simplifier par $\dot{\theta}$. On obtient alors :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = qlE$$

Ou bien:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{qE}{ml}$$
 On cherche toujours à ce que le plus grand degrée soit sans coefficient

On retrouve l'équation d'un oscillateur, (déjà vu dans le cas d'un pendule simple) mais avec un second membre dû à l'existence du champ \vec{E} .

Réponse 5

Comme on n'a pas vu le cas d'une équation avec second membre dans le cours, faisons une analyse. À quoi on s'attend physiquement? On sait que sans l'effet électrique, on aura un pendule simple et le mouvement consistera en des oscillations autours de l'axe vertical (\vec{e}_y dans ce cas), *i.e* oscillations autour de la position d'équilibre. Maintenant, on voit que l'ajout du champ \vec{E} a modifié l'équation, tout comme l'état d'équilibre : la contribution du champ électrique est l'ajout de la constante dans l'équation. On peut dire qu'il n'est pas si inattendu que le mouvement soit alors des oscillations autour de la nouvelle position d'équilibre : tous se passe comme si le plan vertical était celui qui passe par θ_{eq} , et on est devant un pendule simple qui oscille sous l'effet du poids uniquement (dans ce cas le pendule à était initialement dévié par un angle initiale de $-\theta_{eq}$, le moins ne reflète que le signe de la déviation). Mathématiquement, cela veut dire qu'on doit changer notre variable : comme ce n'est pas θ qui va osciller mais $\phi(t) = \theta(t) - \theta_{eq}$, cherchons l'équation vérifiée par ϕ .

On a:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}(\theta - \frac{qE}{mq}) = 0$$

En utilisant le résultat de la question 2, et en observant que $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$, on trouve :

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0$$

Nous sommes devant l'équation d'un pendule simple, exactement comme l'avait prévu notre raisonnement physique. Nous sommes bien dignes d'être les confrères de Feynman! Ainsi, avec les conditions initiales données dans la question, on trouve :

$$\begin{cases} \phi(0) = \theta(0) - \theta_{eq} = -\theta_{eq} \\ \frac{d\phi}{dt}(0) = \frac{d\theta - \theta_{eq}}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

Comme vu dans le cours, $\phi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, où $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. En remplaçant t par 0, on trouve que $A = -\theta_{eq}$. Ainsi $\phi(t) = -\theta_{eq}\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, en dérivant et en remplaçant t par 0, on trouve B = 0. D'où $\phi(t) = -\theta_{eq}\cos(\omega t)$.

D'où
$$\theta(t) = \phi(t) + \theta_{eq} = -\theta_{eq}\cos(\omega t) + \theta_{eq} = \theta_{eq}(1 - \cos(\omega t)).$$

Et en l'exprimant en fonction des constantes du problème, $\theta(t) = \arctan\left(\frac{qE}{mg}\right)(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right))$

14.5 Exercice 4:

Qu'est-ce qui se propage dans une onde?

Solution

Pour avoir une réponse complète et détaillée, voir cours onde 1. Sinon, pour faire bref, c'est l'énergie qui se propage et non pas la matière.

14.6 Exercice 5:

Soit l'équation de la corde $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

- Quelle est la dimension de $\frac{T}{\mu}$?
- Sachant que T est la tension, quelle est la dimension de μ ?

Solution

- On voit bien que $\frac{[y]}{[t]^2} = \left[\frac{T}{\mu}\right] \frac{[y]}{[x]^2}$, donc $\left[\frac{T}{\mu}\right] = \frac{[x]^2}{[t]^2}$, la dimension d'une vitesse au carré.
- Comme T est une force, et d'après le **PFD** il s'agit donc d'une masse multipliée par une accélération. On vérifie alors que la dimension de μ est une masse divisée par une longueur, elle porte bien son nom : masse linéique !

14.7 Exercice 6:

On considère un modèle de l'atmosphère à l'équilibre dans lequel on considère la température T = cte. En assimilant l'air à un gaz parfait, et en supposant que la pression P ne dépend que de l'altitude z, exprimez P(z) en fonction de g, R la constante des gaz parfaits, N_A la constante d'Avogadro, et M la masse d'une particule de l'air. Indication : on pourra faire un raisonnement infinitésimal pour exprimer P(z) en fonction de la masse volumique $\rho(z)$

Solution

On peut être amené en premier lieu à utiliser directement PV = nRT. La question qui se pose est sur quel système ? Il nous faut un système où P serait constante. On considère alors le système constitué par un cylindre de section S quelconque, compris entre z et z+dz, avec dz suffisamment petit que toutes les grandeurs peuvent être supposées constantes dans ce cylindre. L'idée du raisonnement infinitésimal vient du fait que nous ignorons comment évolue la pression, toutefois on connaît son comportement si elle est constante d'après PV = nRT, donc on va étudier des volumes suffisamment petits pour supposer que P = cte.

On applique le **PFD** sur une couche d'air entre z+dz et z. Comme on est à l'équilibre, il n'y a pas de mouvement, et donc l'accélération est nulle. Pour les forces, on a le poids qui vaut $\vec{P} = -mg\vec{e}_z = -\rho(z)Sdz\vec{e}_z$, où ρ la masse volumique qui dépend à priori de z. On a aussi les forces de pressions, soit $-P(z+dz)S\vec{e}_z$ selon celle du haut et $P(z)S\vec{e}_z$ selon celle du bas. Ainsi, en écrivant le **PFD** selon \vec{e}_z , on obtient :

$$-\rho(z)Sdz - P(z+dz)S + P(z)S = 0$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g$$

Nous avons une première équation entre P et ρ . Maintenant, en appliquant PV = nRT à notre système, on voit que :

$$P = \frac{n}{V}RT = \frac{m}{M_{air}V}RT = \frac{\rho}{M_{air}}RT$$
 où M_{air} la masse molaire de l'air.

Ce qui est équivalent à :

$$\rho(z) = \frac{P(z)M_{air}}{RT}.$$

Ainsi, en remplaçant ρ dans la première équation :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M_{air}g}{RT}P(z)$$

Or on sait que la masse d'une molle qui contient N_A particules de l'air vaut par définition M_{air} . Donc par une simple règle de trois, la masse d'une particule de l'air est $M = \frac{M_{air}}{N_A}$. D'où :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{MN_Ag}{RT}P(z)$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 qu'on sait désormais résoudre. On trouve

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{MN_A gz}{RT}}$$

où P_0 la constante d'intégration qui vaut la pression à z=0, en pratique $P_0=1013\mathrm{hPa}.$

Remarque Après une lecture approfondie du cours thermodynamique 2, le lecteur pourra observer que la pression diminue par un facteur de $e^{-\frac{Mgz}{K_BT}}$ (pour rappel $K_B = \frac{R}{N_A}$ la constante de Boltzmann). On voit alors qu'on a une exponentielle d'un rapport entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique (ici, on n'a pas le facteur $\frac{3}{2}$ mais on ne rentre pas dans ces détails). Si on poussait le calcul juste un petit peu on aurait trouvé que la probabilité de trouver une particule entre z et z+dz diminuait par une exponentielle du même rapport. Le génie de Boltzmann sera de généraliser cela, c'est une nouvelle physique qu'on touche des doigts, la **physique statistique**. Mais cela est une autre histoire.

Pôle Physique References

References

[1] IB Maths Resources from Intermathematics. URL: https://ibmathsresources.com/.

- [2] le catalogue de ressources pédagogiques de l'enseignement technologique universitaire. IUT en ligne. URL: https://www.iutenligne.net/.
- [3] Bertrand Russell. "Chapter XXIII: Aristotle's Physics". In: *The History of Western Philosophy*. Routledge, 2004.
- [4] Isaac Newton. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Traduction française par Émilie du Châtelet. 1756.
- [5] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew L. Sands. *The feynman lectures on physics. volume I, mainly mechanics, radiation and heat.* California Institute of Technology, 2013.